

Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B. Entweder Ausschlussverfahren, indem man einige Einträge des Produktes von A mit den vorgeschlagenen Matrizen berechnet, oder das Gauss-Jordan-Verfahren auf A anwenden.

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 3 , so dass $p(2) = 0$.

(B) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

(C) Die Menge $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$.

(D) Die Menge $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A: Die Menge ist abgeschlossen unter Addition und unter Multiplikation mit Skalaren.

Die Menge in B ist nicht abgeschlossen unter Addition, denn z. B. gehören e_1 und $e_2 + e_3$ zur Menge, jedoch nicht ihre Summe.

Die Menge in C ist nicht abgeschlossen unter Addition, denn z. B. sind $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ singulär, $A + B$ jedoch regulär.

Man sieht schnell, dass der Nullvektor nicht zur Menge bei D gehört.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

- (A) $a = 1/2$
(B) $a = 1/3$
(C) $a = -1/3$
(D) $a = 1$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A: Das Gauss-Verfahren liefert das Endschema

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 - 3a \end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingung ergibt $a = -1/3$.

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt...

- (A) Wenn A invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$, dann ist $\det A = \pm 1$.
(B) Wenn $A^T = -A$, dann ist $\det A = -1$.
(C) Wenn $A^3 = 3A$, dann ist $\det A = 3^n$.
(D) $\det(-A) = \det A$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A: Es gilt nämlich $1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det A \cdot \det(A^T) = (\det A)^2$.

Die übrigen Varianten schliesst man aus, denn allgemein gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

- (A) $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist D: Die Funktionen in B sind keine Lösungen (einsetzen!). Die Funktionen in A und in C sind Lösungen, spannen aber je für sich den Lösungsraum nicht auf.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit
(B) negative definit
(C) indefinit
(D) positiv semidefinit

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A: Die zugehörige Matrix $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit (Hurwitz).
Oder so: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2)$.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (A) Die Abbildung F_A beschreibt eine Translation.
(B) Die Abbildung F_A beschreibt eine Spiegelung.
(C) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x_1 -Achse um 90° .
(D) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x_1 -Achse um 180° .

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B: Der Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) wird abgebildet auf den Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_3, x_2) . Dies entspricht einer Spiegelung an der Ebene mit der Gleichung $x_2 = x_3$.

1.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Was sind die Eigenwerte von A^T ?

- (A) 2, 8, 0
- (B) 2, 0
- (C) 2, 1, 0
- (D) 1, 0

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B: Die Eigenwerte von A^T und von A stimmen überein. Zur Berechnung von $\det(A - \lambda I)$ entwickle man die Determinante nach der zweiten Spalte.

1.MC9 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A, wie man sofort abliest.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A) AB
- (B) A^2

- (C) $A + C$
(D) $A + C^T$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist D. Alle anderen Operationen sind für die gegebenen Matrizen nicht definiert.

1.MC11 [1 Punkt] Seien $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (-1, 0, -2)^T$ Vektoren in \mathbb{R}^3 . Welcher der folgenden Vektoren v ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu v_1 und zu v_2 ?

- (A) $(0, 1, -1)$
(B) $(-2, 0, 1)$
(C) $(-2, 1, 1)$
(D) $(-2, 1, -1)$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist C: Der Vektor bei A ist nicht orthogonal zu v_2 , der Vektor bei B ist nicht orthogonal zu v_1 , der Vektor bei D ist weder zu v_1 noch zu v_2 orthogonal. Alternative: Berechne das Vektorprodukt $v_1 \times v_2$.

1.MC12 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 1, 0)$
(B) $(1, 0, 1)$
(C) $(2, 1, 1)$
(D) $(1, 1, 1)$

Lösung:

Die richtige Lösung ist D: Nur dieser Vektor erfüllt die Eigenwertgleichung $Ax = \lambda x$ nicht.

1.MC13 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn f invertierbar ist, dann ist f^{-1} linear.
(B) $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
(C) Wenn $\ker f = \ker g$, dann folgt $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
(D) $\operatorname{im} f$ ist orthogonal zu $\ker f$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist offensichtlich A. Seien F und G die Darstellungsmatrizen von f und g . Dann ist $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein Gegenbeispiel für B, denn $\ker f = \text{span } e_1$, aber $\ker GF = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist \mathbb{R}^2 . Ein Gegenbeispiel für C ist $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ein Gegenbeispiel für D ist $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.MC14 [1 Punkt] Welchen Wert hat die Determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C) $-2a^2$
- (D) $-2(1+2a)$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B, wie man mit den Blocksatz sofort sieht.

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det A = \det B = 0$.
- (B) Wenn $A^2 = 0$, dann ist $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$.
- (C) Wenn $A = (A^{-1})^T$, dann gilt $\det A = 1$.
- (D) Wenn $\det A = 0$, dann ist A^2 die Nullmatrix.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B: Es gilt $(\mathbb{I} + A)(\mathbb{I} - A) = \mathbb{I}^2 - A^2 = \mathbb{I}$.
 Gegenbeispiel für A: $A = 0$ und B irgendeine reguläre Matrix.
 Gegenbeispiel für C: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 Gegenbeispiel für D: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.MC16 [1 Punkt] Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine Abbildung $f(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Dimension des Bilds von f gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

Lösung:

Die korrekte Lösung ist C: Die drei Spalten der Matrix sind linear unabhängig. Das sieht man mit Gauss, oder indem man bemerkt, dass die Untermatrix $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \neq 0$.

1.MC17 [1 Punkt] Neben der Standardbasis \mathcal{E} in \mathbb{R}^2 sei noch die Basis $\mathcal{B} = \{(2,0)^T, (3,4)^T\}$ gegeben. Für welche der folgenden Matrizen M , gilt $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$?

- (A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist B: Die Matrix M ist die Übergangsmatrix von \mathcal{E} zu \mathcal{B} , also die Inverse der Übergangsmatrix von \mathcal{B} zu \mathcal{E} . ist: Die Übergangsmatrix von \mathcal{B} zu \mathcal{E} ist $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Als Inverse kommt nur die Matrix in B infrage.

1.MC18 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T(A^{-1})^T$
- (B) $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$
- (C) $((AB)^{-1})^T = B^{-1}A^T A^{-1}B^T$
- (D) $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T(B^{-1})^T$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist D.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn A invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von A ungleich Null.
(B) Wenn A diagonalisierbar ist, dann ist A^2 auch diagonalisierbar.
(C) Wenn A invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist A^{-1} diagonalisierbar.
(D) Wenn A einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist A invertierbar.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist klarerweise D: Z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A: Ist ein Eigenwert $\lambda = 0$, dann hätte man für das charakteristische Polynom $p_A(0) = \det A = 0$, ein Widerspruch.

B: Schreibe $A = TDT^{-1}$, mit D diagonal. Dann ist $A^2 = TD^2T^{-1}$ ebenfalls diagonalisierbar.

C: Schreibe $A = TDT^{-1}$. Dann folgt $A^{-1} = TD^{-1}T^{-1}$.

1.MC20 [1 Punkt] Sei V der reelle Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$. Was ist die Abbildungsmatrix $[g]_{\mathcal{B}}$ der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V \\ y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist A: Es gilt

$$g(e^x) = e^x + 4e^x - 5e^x = 0 \\ g(e^{3x}) = 9e^{3x} + 12e^{3x} - 5e^x = 16e^{3x},$$

und somit

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 0$. Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix T , so dass $T^{-1}A_0T$ diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für $k = -10$, falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2 .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von k ist A_k diagonalisierbar?

Lösung:

- (a) $A_0 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, also diagonalisierbar mit einer orthogonalen Transformationsmatrix T . T hat als Spalten die Eigenvektoren von A_0 . Die Eigenwerte von A_0 sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -10$. Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist $E_0 = \ker A_0$ und wird aufgespannt von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -10 ist $E_{-10} = \ker(A_0 + 10\mathbb{I})$ und wird aufgespannt vom Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Spalten sind bereits paarweise orthogonal, wir müssen

sie nur noch normieren: $T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) The characteristic polynomial is

$$\begin{aligned}
 p_k(x) &= \det \begin{pmatrix} x+9 & -k & -3 \\ 0 & x-k & 0 \\ -3 & 0 & x+1 \end{pmatrix} \\
 &= -3(3(x-k)) + (x+1)(x+9)(x-k) \\
 &= (x-k)(-9 + (x+1)(x+9)) \\
 &= (x-k)(x^2 + 10x) \\
 &= x(x-k)(x+10).
 \end{aligned}$$

The eigenvalues are $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = k$ and $\lambda_3 = -10$. If $k \in \mathbb{R}$ and $k \neq 0$, $k \neq -10$, then A_k is diagonalizable, since all the eigenvalues have multiplicity 1.

Case $k = 0$: the eigenvalue 0 has multiplicity 2, the dimension of the corresponding eigenspace is

$$\dim V_0 = 3 - \text{rank}(0 \cdot I - A_0) = 3 - \text{rank} A_0 = 2.$$

A similar computation shows that

$$\dim V_{-10} = 3 - \text{rank}(-10 \cdot I - A_0) = 1,$$

which again agrees with the multiplicity of the corresponding eigenvalue. In particular, the matrix A_0 is diagonalizable.

Case $k = -10$: in this case the dimension of the eigenspace of the eigenvalue -10 has dimension 1, which is lower than the multiplicity of the eigenvalue itself. Hence, A_{-10} is not diagonalizable.

(c) It is enough to take an eigenvectors from each eigenspace. The space V_0 is given by

$$\begin{cases} -9x - 10y + 3z = 0 \\ -10y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = 3x \end{cases};$$

thus $V_0 = \langle (1, 0, 3) \rangle$. Similarly for V_{-10} ,

$$\begin{cases} -9x - 10y + 3z = -10x \\ -10y = -10y \\ 3x - z = -10z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3z \\ y = 0 \end{cases};$$

so $V_{-10} = \langle (-3, 0, 1) \rangle$. Take for instance $v_1 = (1, 0, 3)$ and $v_2 = (-3, 0, 1)$.

22. Sei P_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in P_2$:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

(a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome $p(x) = 3x^2 - 2$ und $q(x) = x + 1$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.

- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $p(x) = x^2 + x + 1$ orthogonal auf den Unterraum $\text{span}(1, x)$.

Lösung:

(a) $\langle p, q \rangle = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0.$

(b) We find the norm of the first polynomial

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{3},$$

hence $b_1(X) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Let now

$$\tilde{b}_2(X) = X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

where

$$\langle X, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

We now normalize $\tilde{b}_2(X)$:

$$\|X\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

The normalized vector is then $b_2(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}X$.

We proceed by computing

$$\tilde{b}_3(X) = X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{2}}X \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}X - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = X^2 - \frac{2}{3}.$$

The norm of $\tilde{b}_3(X)$ is

$$\left| X^2 - \frac{2}{3} \right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

The third basis vector is then

$$b_3(X) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{6}}{3},$$

and we get the orthonormal basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}X, \frac{\sqrt{6}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}.$$

- (c) From (a), we have the orthonormal basis of $\langle 1, X \rangle$ given by $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}X \right\}$. The orthogonal projection of $X^2 + X + 1$ on this space is then

$$\langle X^2 + X + 1, \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle \frac{\sqrt{3}}{3} + \langle X^2 + X + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}X \rangle \frac{\sqrt{2}}{2}X = X + \frac{5}{3}.$$

23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [2 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) [5 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems $Y' = AY$ an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $Y' = AY + B$ mit $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

- (a) Die Gleichung $y'' = y' + 6y$ geht durch die Substitution $y_1 = y$ and $y_2 = y'$ über ins das äquivalente System

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 6y_1 + y_2 \end{cases},$$

das heisst, $Y' = AY$, mit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -6 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = (1, 3)^T$ und $v_2 = (1, -2)^T$. Die allgemeine Lösung is somit

$$Y(x) = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zur Lösung des Anfangswertproblems setzen wir in der allgemeinen Lösung $x = 0$ und erhalten

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ 3C_1 - 2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man findet $C_1 = 3/5$ und $C_2 = 2/5$. Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$Y(x) = \frac{3}{5} e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Wir addieren die allgemeine Lösung des homogenen Systems zu einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems. Dazu wählen wir eine stationäre Lösung, also $Y' = 0$: Das heisst

$0 = AY + B$ oder ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -6y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$$

Man findet $y_1 = 1$ und $y_2 = -6$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems lautet also

$$Y(x) = C_1 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$