

# Basisprüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $A^T A = \mathbb{1}_n$ .
- (b)  $AA^T = -\mathbb{1}_n$ .
- (c) Die Eigenwerte von  $A$  haben Betrag  $\leq 1$ .
- (d) Die Eigenwerte von  $A$  haben Betrag  $\geq 1$ .

**2.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

und die Unterräume  $U = \text{Kern } A$  sowie  $V = \text{Bild } A$  des  $\mathbb{R}^3$ . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a)  $(-1, 2, -1)^T \in V$ .
- (b)  $(-1, 2, -1)^T \in U$ .
- (c)  $\dim U \neq 0$ .
- (d)  $U \cap V = \{0\}$ .

**3.** Drei der folgenden Eigenschaften sind äquivalent für Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Welche gehört nicht dazu?

- (a) 0 ist ein Eigenwert von  $A$ .
- (b)  $A$  ist singulär.
- (c)  $\text{Kern } A \neq \emptyset$ .
- (d)  $\text{Bild } A \neq \mathbb{R}^n$ .

4. Eine Basis des Kerns von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} -18 \\ 21 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

5. Eine Basis des Bildes von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

6. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist...

- (a) halbeinfach, aber nicht einfach.
- (b) halbeinfach und einfach.
- (c) einfach, aber nicht halbeinfach.
- (d) weder halbeinfach noch einfach.

**Siehe nächstes Blatt!**

**7.** Sei  $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$  der komplexe Vektorraum der stetigen Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $f, g \in V$ , betrachte die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und  $f, g \in V$  gilt  $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ .
- (b) Für  $f, g \in V$  gilt  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ .
- (c) Für  $f, g, h \in V$  gilt  $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$  und  $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$ .
- (d)  $\langle f, f \rangle \geq 0$  für alle  $f \in V$ .

**8.** Die Orthogonalprojektion des Vektors  $v = (1, 4, 3)^T$  auf den von  $w = (0, -2, 1)^T$  aufgespannten Unterraum ist gegeben durch

- (a)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

**9.** Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

hat die Signatur  $(p, n, z) =$

- (a)  $(2, 0, 1)$
- (b)  $(0, 3, 0)$
- (c)  $(3, 0, 0)$
- (d)  $(0, 2, 1)$

**10.** Sei erneut

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

und  $B = -2A$ . Die Matrix  $B$  ist

- (a) negativ semidefinit, aber nicht negativ definit.
- (b) negativ definit.
- (c) positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.
- (d) positiv definit.

**11.** Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- (a) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} = \text{Bild } A$ .
- (b) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} \subseteq \text{Bild } A$  und es gibt  $A$  derart, dass  $\text{Bild } A^{2018} \neq \text{Bild } A$ .
- (c) Für alle  $A \in \mathbb{R}^{228 \times 228}$  gilt  $\text{Bild } A^{2018} \supseteq \text{Bild } A$  und es gibt  $A$  derart, dass  $\text{Bild } A^{2018} \neq \text{Bild } A$ .
- (d) Keine der obigen drei Aussagen ist richtig.

**Siehe nächstes Blatt!**

**12.** Es seien  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  beliebig. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Aus  $Av = av$  und  $Bv = bv$  folgt  $e^{AB}v = abv$ .
- (b) Aus  $Av = \lambda v$  und  $Bw = \lambda w$  folgt  $e^{A+B}(v+w) = \lambda(v+w)$ .
- (c) Aus  $Av = av$  und  $Bv = bv$  folgt  $ABv = abv$ .
- (d) Aus  $Av = \lambda v$  und  $Bw = \lambda w$  folgt  $(A+B)(v+w) = \lambda(v+w)$ .

**13.** Die gewöhnliche Differentialgleichung dritten Grades

$$y'''(t) = -y'(t) + y(t)$$

kann übergeführt werden in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem der Form  $z'(t) = Az(t)$  mit

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**14.** Die Gleichung

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$$

beschreibt

- (a) eine Hyperbel.
- (b) eine Parabel.
- (c) zwei Geraden.
- (d) keine der drei obigen Antworten ist richtig.

**15.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $e^A$  gegeben durch

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Siehe nächstes Blatt!**



**16.** Sei  $\mathcal{C}([-1, 1])$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen. Welche der folgenden Mengen bildet einen Untervektorraum von  $\mathcal{C}([-1, 1])$ ?

(a)  $A = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) \neq 0\}$

(b)  $B = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) = 0\}$

(c)  $C = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) \geq 0\}$

(d)  $D = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1]) : f(0) > 0\}$

**17.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und definiere wie üblich das Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$  für  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^2$  bezüglich dieses Skalarprodukts ist gegeben durch

(a)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

(b)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(c)  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$

(d)  $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \right\}$

**18.** Sei  $n > 1$ . Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- (a) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
- (b) Für alle invertierbaren  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(((A^2)^T)^{-1}) = \det(A)^{-2}$ .
- (c) Für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
- (d) Für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

**19.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}^3$  bezüglich der Standardbasis mit Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Sei  $f$  die Spiegelung an der  $(x_1, x_2)$ -Ebene und  $g$  die Drehung um  $90^\circ$  um die  $x_2$ -Achse, welche die positive  $x_1$ -Achse auf die positive  $x_3$ -Achse abbildet. Bezeichne mit  $D_{g \circ f}$  die Darstellungsmatrix der Komposition  $g \circ f$ . Dann gilt

(a)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(d)

$$D_{g \circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**20.** Sei

$$U = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 = 0\}$$

und

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ und } x_1 + x_4 = 0\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a)  $U + V = V$ .
- (b)  $\dim(U \cap V) = 1$ .
- (c)  $\dim(U + V) = 4$ .
- (d)  $\dim(U \cup V) = 3$ .

**21. [10 Punkte]** Für  $a \in \mathbb{R}$  sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- a) **[2 Punkte]** Für welche Werte von  $a$  ist die Matrix  $A$  singular bzw. regulär? Bestimmen Sie für  $a = 0$  das Inverse von  $A$ .
- b) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie den Kern und das Bild von  $A$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- c) **[4 Punkte]** Bestimmen Sie für  $a = 8$  die Eigenwerte und Eigenräume von  $A$ . Geben Sie die algebraische und die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte an.

**Bitte wenden!**

**22. [10 Punkte]** Betrachte für  $a \in \mathbb{R}$  das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2 + ay_3 \\y_2' &= ay_2 \\y_3' &= ay_1 + y_2 - y_3.\end{aligned}$$

a) **[4 Punkte]** Schreiben Sie das System in der Form  $y' = Ay$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und die zugehörigen Eigenvektoren.

*Hinweis: Es stellt sich heraus, dass die Eigenvektoren unabhängig von  $a$  gewählt werden können.*

b) **[3 Punkte]** Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems  $y' = Ay$  an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem  $y(0) = (1, 2, 3)^T$ .

c) **[3 Punkte]** Sei nun  $a = 2$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems  $y' = Ay + b$  mit  $b = (1, -2, -2)^T$ .

**23. [10 Punkte]** Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad  $\leq 2$  ist ein Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle P, Q \rangle := 2 \int_0^\infty P(x)Q(x)e^{-2x} dx$$

für  $P, Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

*Hinweis: Sie dürfen in allen Teilaufgaben ohne Beweis verwenden, dass für alle  $n \in \mathbb{N}_0$*

$$2 \int_0^\infty x^n e^{-2x} dx = 2^{-n} n!$$

*gilt, wobei wie üblich  $0! = 1$  ist.*

a) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie alle Elemente von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , die auf  $P(x) := x - 1$  orthogonal stehen.

b) **[3 Punkte]** Eine Basis von  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  ist gegeben durch  $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ . Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis  $\mathcal{C}$  aus  $\mathcal{B}$ .

c) 1. **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $A$  der Abbildung

$$\begin{aligned}d : V &\rightarrow V \\P &\mapsto P'\end{aligned}$$

bezüglich der Basis  $\mathcal{C}$ , wobei  $P'$  die Ableitung von  $P$  bezeichnet.

2. **[1 Punkt]** Bestimmen Sie eine Matrix  $S$ , für die gilt

$$\langle P, Q \rangle = [P]_{\mathcal{C}}^T S [Q]_{\mathcal{C}}.$$

Hierbei bezeichnet  $[P]_{\mathcal{C}}$  den Koordinatenvektor von  $P$  in der Basis  $\mathcal{C}$ .

3. **[2 Punkte]** Verifizieren Sie unter Verwendung von 1. und 2., dass

$$\langle\langle P, Q \rangle\rangle := \langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle + 6\langle P, Q \rangle$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  definiert.