

Die Single Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. **Insbesondere lohnt es sich zu raten!**

1. Was ist die Determinante der folgenden reellen Matrix?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) (Richtig) 10
(b) (Falsch) 4
(c) (Falsch) -10
(d) (Falsch) 8

2. Sei

$$U := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = ax_3 \text{ und } x_1 + x_2 = x_3\}$$

und

$$V := \text{span} \{(2, 1, 3)^T, (1, -1, 0)^T\}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $U = V$?

- (a) (Richtig) $a = 1$
(b) (Falsch) $a = 0$
(c) (Falsch) $a = -1$
(d) (Falsch) Es gibt kein solches a .

3. Welche der folgenden Teilmengen ist *kein* Untervektorraum?

- (a) (Falsch) $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3$
(b) (Richtig) $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| = |x_3|\}$
(c) (Falsch) $\{p \in P_2 \mid p(1) = 0 \text{ und } p(1100) = 0\} \subset \mathcal{P}_3$, wobei \mathcal{P}_n für $n \in \mathbb{N}$ der Vektorraum der Polynome mit Grad $\leq n$ ist.
(d) (Falsch) $\{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^T = A\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

4. Für welche dieser Matrizen A ist A^{100} die Nullmatrix?

(a) (Falsch) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) (Richtig) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\pi & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) (Falsch) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) (Falsch) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

(a) (Richtig) Wenn v ein Eigenvektor von A^2 ist, dann ist v auch ein Eigenvektor von A .

(b) (Falsch) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^3 zum Eigenwert λ^3 .

(c) (Falsch) Falls A invertierbar ist gilt $\det(A^{-3}) = \frac{1}{\det(A)^3}$.

(d) (Falsch) Wenn $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ähnlich zu A ist, dann ist B^3 ähnlich zu A^3 .

6. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Was ist $\dim \ker(A)$?

(a) (Falsch) 0

(b) (Falsch) 1

(c) (Richtig) 2

(d) (Falsch) 4

7. Sei

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 . Welche Basis \mathcal{C} von \mathbb{R}^3 ergibt sich aus \mathcal{B} durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens bezüglich des Standardskalarprodukts?

(a) **(Richtig)**

$$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) **(Falsch)**

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(c) **(Falsch)**

$$\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(d) **(Falsch)**

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

8. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) **(Richtig)** $(1, -2, -1)^T$

(b) **(Falsch)** $(0, 0, 0)^T$

(c) **(Falsch)** $(1, 2, 1)^T$

(d) **(Falsch)** Keiner der obigen Vektoren

9. Was sind Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$?

(a) **(Richtig)** 0, 5, 5

(b) **(Falsch)** 0, 0, 5

(c) **(Falsch)** 2, 3, 5

(d) **(Falsch)** -5, 0, 5

10. Was ist eine Basis von $\text{im} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

(a) **(Richtig)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(c) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(d) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

11. Was ist eine Basis von $\ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$?

(a) **(Richtig)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(b) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

(c) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(d) **(Falsch)** $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

12. Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times n}$ mit $\dim \ker(A) = 2$ und

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Was ist $n \in \mathbb{Z}$?

- (a) **(Richtig)** $n = 5$
 - (b) **(Falsch)** $n = 3$
 - (c) **(Falsch)** $n = 4$
 - (d) **(Falsch)** Die Angaben reichen nicht aus um n eindeutig zu bestimmen.
13. Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix die N Einsen und sonst nur Nullen enthält. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?
- (a) **(Falsch)** Wenn $N < n$, dann ist A nicht invertierbar.
 - (b) **(Falsch)** Wenn $n = N$ und A invertierbar ist, dann ist A orthogonal.
 - (c) **(Richtig)** Wenn $N > n$, kann es sein, dass A orthogonal ist.
 - (d) **(Falsch)** Wenn A orthogonal ist, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k > 0$, so dass A^k die Einheitsmatrix ist.
14. Sei $U := \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \mid \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 a_{i,j} = 0 \right\}$. Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?
- (a) **(Richtig)** $\dim(U) = 11$
 - (b) **(Falsch)** $\dim(U) = 10$
 - (c) **(Falsch)** $\dim(U) = 1$
 - (d) **(Falsch)** U ist kein Vektorraum.

15. Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $A^{-1} = B$?

- (a) **(Richtig)** $a = -4$
- (b) **(Falsch)** $a = 4$
- (c) **(Falsch)** $a = 0$
- (d) **(Falsch)** $a = 1$

16. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und sei $q_A(x) := x^T A x$ für $x \in \mathbb{R}^2$ die zu A zugehörige quadratische Form.
Sei $X := \{x \in \mathbb{R}^2 | q_A(x) = 1\}$. Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*?

- (a) **(Richtig)** X ist eine Hyperbel.
- (b) **(Falsch)** X ist eine Ellipse.
- (c) **(Falsch)** X ist die leere Menge.
- (d) **(Falsch)** X ist ein sich schneidendes Geradenpaar.

17. Sei

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welches der folgenden Paare (Q, R) ist eine QR -Zerlegung von A ?

- (a) **(Richtig)**

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) **(Falsch)**

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) **(Falsch)**

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) **(Falsch)**

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 . Auf \mathcal{P}_3 sei das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) \, dx$$

gegeben. Wählen Sie eine Orthonormalbasis für den Vektorraum $\text{span}\{x, x^2\}$.

- (a) **(Richtig)** $\left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}}x^2 \right\}$
- (b) **(Falsch)** $\{x, x^2\}$
- (c) **(Falsch)** $\left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{\sqrt{15}}{4}(x - x^2) \right\}$
- (d) **(Falsch)** $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}x^3 \right\}$

19. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- (a) **(Richtig)** A hat einen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit > 1 .
- (b) **(Falsch)** A ist halbeinfach.
- (c) **(Falsch)** A hat nur reelle Eigenwerte.
- (d) **(Falsch)** Es gibt keine ganze Zahl $k \geq 1$, so dass $A^k = 0$.

20. Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + 2x_3 &= 5 \\ -2x_2 + x_2 + 3x_3 &= -1 \\ ax_1 + x_2 + 7x_3 &= 9 \end{aligned}$$

- (a) **(Richtig)** $a = 0$.
- (b) **(Falsch)** $a = 1$
- (c) **(Falsch)** $a = -2$
- (d) **(Falsch)** $a = 2$

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. (10 Punkte)

(a) (2 Punkte) Gegeben sei das folgende überbestimmte lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 1 \\ -2x_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Stellen Sie für die gegebenen Gleichungen die Normalgleichungen auf.

(b) (2 Punkt) Bestimmen Sie die Norm des Residuenvektors $\|r\|$ für die Näherungslösung $x = (-\frac{1}{3}, 2)^T$ des Gleichungssystems in (a).

(c) (4 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten Sie die Normalgleichungen (unabhängig von denen in (a))

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^T c$$

und lösen Sie diese für $c = (1, 1, 1)^T$ und $c = (-6, 12, 0)^T$ und $c = (0, 2, 4)^T$.

(d) (2 Punkte) Geben Sie eine Möglichkeit für $c \in \mathbb{R}^3$ mit $c \neq (0, 0, 0)^T$ an, so dass das Gleichungssystem $Ax = c$ mindestens eine exakte Lösung hat. Wieviele exakte Lösungen x hat $Ax = c$ für dieses c ? Begründen Sie ihre Antworten.

Lösungsskizze

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $c = (1 \ 2 \ 3)^T$. Dann ist das gegebene Gleichungssystem $Ax = c$. Die Normalgleichungen sind $A^T Ax = A^T c$. Wir haben

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T c = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Also sind die Normalgleichungen

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt

$$r = Ax - c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - c = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und somit $\|r\| = \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

(c) Es gilt

$$B := (A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} A^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Also sind die Lösungen von $A^T A x = A^T T c$ gegeben durch $x = B c$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ B \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \\ B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Irgendein Vektor im Bild von A , z.B. der Vektor $c = (1, 1, 1)^T$. Es gibt dann genau eine Lösung, da $\dim \ker A = 0$.

22. (10 Punkte) Sei $V := \text{span}\{1, e^x, e^{-x}\}$ der Untervektorraum von $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := (1, e^x, e^{-x})$. Hierbei ist $1 \in \mathcal{B}$ die konstante Funktion mit Wert $1 \in \mathbb{R}$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung

$$F: V \rightarrow V$$

für die gilt

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto -1 \\ \cosh(x) &\mapsto \sinh(x) - 1 \\ \sinh(x) &\mapsto \cosh(x) \end{aligned}$$

in der Basis \mathcal{B} .

(b) (2 Punkte) Sei $\mathcal{C} = \left(1, \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$ eine weitere Basis von V . Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} zu \mathcal{C} .

(c) (2 Punkte) Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $G: V \rightarrow V$ in der Basis \mathcal{B} . Berechnen Sie die Darstellungsmatrix C von G bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} , d.h. es gilt $[G(x)]_{\mathcal{C}} = C[x]_{\mathcal{B}}$.

Hinweis: Wenn Sie sich nicht sicher sind, ob Sie in Teil (b) die Übergangsmatrix korrekt berechnet haben, können Sie ohne Punktabzug annehmen, dass sie durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(d) (4 Punkte) Sei $H := G^{-1}$ die inverse Abbildung von G . Berechnen Sie die Darstellungsmatrix D von H in der Basis \mathcal{B} und die Funktionswerte $H(1)$ und $H(e^x)$ und $H(e^{-x})$.

Lösungsskizze:

(a) Es gilt

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x) \mapsto \sinh(x) + \cosh(x) - 1 = e^x - 1$$

und

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x) \mapsto \sinh(x) - \cosh(x) - 1 = -e^{-x} - 1,$$

also

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt

$$[1]_C = (1 \ 0 \ 0)^T, \quad [e^x]_C = (0 \ 1 \ 1)^T, \quad [e^{-x}]_C = (0 \ 1 \ -1)^T.$$

Also

$$T = ([1]_C \ [e^x]_C \ [e^{-x}]_C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

(c) Es gilt

$$C = T \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bzw. (bei mit dem alternativen T):

$$C = T \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Es gilt

$$D = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} H(1) &= 1 + e^x \\ H(e^x) &= 1 \\ H(e^{-x}) &= -4 - 2e^x + e^{-x} \end{aligned}$$

23. (10 Punkte)

(a) (5 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die komplexen (und reellen) Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A .

(b) (3 Punkte) Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2i$ und $\lambda_3 = -2i$ mit den zugehörigen Eigenräumen

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \text{span}\{(1, 0, 0)^T\} \subset \mathbb{C}^3, \\ E_{2i} &= \text{span}\{(3, 1, i)^T\} \subset \mathbb{C}^3, \\ E_{-2i} &= \text{span}\{(3, 1, -i)^T\} \subset \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $y' = By$.

- (c) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie die Lösung von $y' = By$ für die gilt $y(0) = (1 \ 1 \ 1)^T$.

Lösungsskizze:

- (a) Es gilt $\lambda_1 = i$ mit $E_i = \text{span}\{(1, 2, i)^T\}$. Es gilt $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$ mit $E_{-i} = \text{span}\{(1, 2, -i)^T\}$.
Es gilt $\lambda_3 = -1$ mit $E_{-1} = \text{span}\{(0, 1, 0)^T\}$.
- (b) Laut der Vorlesung ist die allgemeine komplexe Lösung des DGLS

$$y(x) = C_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + C_3 e^{2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

für $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Die reellen Lösungen ergeben sich als Real- und Imaginärteil der komplexen Lösungen. Diese sind

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(e^{-2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 3 \cos(-2x) \\ \cos(-2x) \\ -\sin(-2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cos(2x) \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} = \text{Re} \left(e^{2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right) \\ \text{Im} \left(e^{-2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 3 \sin(-2x) \\ \sin(-2x) \\ \cos(-2x) \end{pmatrix} = -\text{Im} \left(e^{2ix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Als allgemeine reelle Lösung ergibt sich somit

$$y(x) = D_1 e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} 3 \cos(2x) \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} + D_3 \begin{pmatrix} 3 \sin(-2x) \\ \sin(-2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

für $D_1, D_2, D_3 \in \mathbb{R}$.

- (c) Durch Einsetzen von $x = 0$ erhalten wir

$$y(0) = D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen $y(0) = (1 \ 1 \ 1)^T$ nach D_1, D_2, D_3 auf und erhalten $D_1 = -2, D_2 = 1, D_3 = -1$. Die Lösung lautet also

$$y(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-2x} + 3 \cos(2x) + 3 \sin(2x) \\ \cos(2x) + \sin(2x) \\ \cos(2x) - \sin(2x) \end{pmatrix}.$$