

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Es seien v_1, v_2 zwei Eigenvektoren der Matrix A . Dann ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von A .		
b) Sei A eine diagonalisierbare Matrix. Dann ist auch A^2 diagonalisierbar.		
c) Für zwei $n \times n$ -Matrizen A, B gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\ker(B))$ genau dann, wenn A und B den Eigenwert 0 mit der selben algebraischen Vielfachheit besitzen.		
d) Sei A eine $n \times n$ -Matrix und b ein Eigenvektor von A . Dann hat das Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens eine Lösung.		
e) Wenn eine Matrix A invertierbar ist, so ist auch A^\top invertierbar.		
Wenn eine Matrix A diagonalisierbar ist, so ist auch A^\top diagonalisierbar.		
f) Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.		
Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(f) = \{0\}$.		
g) Der Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 hat genau 3 verschiedene Unterräume der Dimension 2.		
h) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ haben die selben Eigenwerte.		
i) Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2$ ist ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 definiert.		
Durch $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_2 + x_2 y_1$ ist ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 definiert.		
j) Die Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär.		

2. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -8 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

- a) [6 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A . Geben Sie weiter eine diagonale Matrix D und eine Matrix T an, so dass $D = T^{-1}AT$ gilt.
- b) [1 Punkt] Ist A invertierbar?
- c) [3 Punkte] Kann man eine orthogonale Matrix T finden, welche $D = T^{-1}AT$ erfüllt? Begründen Sie Ihre Antwort!

3. [10 Punkte] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Sei weiter $\beta \in \mathbb{R}$ und

$$F : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto p(x) + \beta xp'(x) - 2xp''(x)$$

eine lineare Abbildung.

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis \mathcal{B} .
- b) [1 Punkt] Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist F diagonalisierbar?
- c) [4 Punkte] Bestimmen Sie für die β aus b) eine Basis von Eigenvektoren von F .
- d) [3 Punkte] Bestimmen Sie, für welche β aus b) die Gleichung $F(p(x)) = x$ eine Lösung $p \in \mathcal{P}_2$ besitzt und geben Sie im Existenzfall alle solchen Lösungen an.

4. [10 Punkte] Sei

$$q(x) = x_1^2 + \sqrt{2} \cdot 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

eine quadratische Form mit $x = (x_1, x_2)^\top$.

- a) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine symmetrische, reelle Matrix A , so dass $q(x) = x^\top Ax$ gilt.
- b) [6 Punkte] Führen Sie die Hauptachsentransformation $y = Tx$ durch.
- c) [3 Punkte] Skizzieren Sie die Menge $Q = \{x \mid q(x) = 0\}$ im y -Koordinatensystem der Hauptachsen.

5. [10 Punkte] Wir betrachten den Unterraum

$$U = \text{span} \left\{ (1, 0, 1, 0)^\top, (2, 2, 2, 1)^\top \right\}$$

von \mathbb{R}^4 .

- a) **[3 Punkte]** Wir bezeichnen mit U^\perp alle Vektoren von \mathbb{R}^4 , welche senkrecht auf U stehen. Bestimmen Sie U^\perp !
- b) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von \mathbb{R}^4 bezüglich des Standardskalarproduktes, welche ausschliesslich Vektoren aus U resp. U^\perp enthält.
- c) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von $x = (5, 1, -2, 0)^\top$ auf U an.
- d) **[2 Punkte]** Geben Sie die Orthogonalprojektion von $x = (5, 1, -2, 0)^\top$ auf U^\perp an.