

Lösungen: Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist $-3v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ...

- (a) -3λ
- (b) 3λ
- ✓ (c) λ
- (d) $-3v$ ist kein Eigenvektor.

Erklärung: Da A eine lineare Abbildung ist und $Av = \lambda v$ haben wir

$$A(-3v) = -3Av = -3\lambda v = \lambda(-3v).$$

Das heisst genau, dass $-3v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

2. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Seien A und B Darstellungsmatrizen von F . Welche der folgenden Aussagen stimmt **nicht** in allgemein?

- (a) A und B haben dasselbe charakterische Polynom.
- (b) A und B haben dasselbe Spektrum.
- ✓ (c) A und B haben denselben Kern.
- (d) A und B haben dieselbe Spur.

Erklärung: Zwei Darstellungsmatrizen von derselben linearen Abbildung sind immer ähnlich. Wir wissen, dass (a), (b) und (d) gelten für ähnliche Matrizen. Sei jetzt $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$ und F die Abbildung definiert durch $e_1 \mapsto e_1$ und $e_2 \mapsto 0$. Dann gilt $A := [F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sei $\mathcal{B}' := \{e_2, e_1\}$. Dann ist $B := [F]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\text{Kern } A = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\text{Kern } B = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sind. Deshalb stimmt (c) nicht.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $(A^{-1})^\top$ sind ...

- (a) $-3, 2$ und -6 .
- (b) $3, -2$ und 6 .
- ✓ (c) $-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$.
- (d) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$.

Erklärung: Man wendet hier zwei wichtige Eigenschaften von Eigenwerten an:

- Die Eigenwerte von A sind gleich den Eigenwerten von A^\top .
- Für $n \in \mathbb{Z}$ sind die Eigenwerte von A^n durch λ_i^n gegeben, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

Aus direkter Berechnung des charakterischen Polynoms oder der Bemerkung, dass die Eigenwerte einer unteren Dreiecksmatrix auf dem Diagonal stehen, sieht man, dass die Eigenwerte von A gleich $-6, 2$ und -3 sind. Für $(A^{-1})^\top$ reicht es zu invertieren. Deshalb hat die Matrix die Eigenwerte $-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{3}$.

4. Welche Aussage zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ passt nicht zu den anderen?

- (a) $\dim \text{Kern}(A) = 2$.
- (b) Es gibt zwei Pivot-Variablen.
- ✓ (c) $\dim \text{Bild}(A) = 1$.
- (d) $\text{Rang}(A) = 2$.

Erklärung: Da $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ist, wissen wir, dass $\dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A = 4$ ist. Wir wissen auch, dass

$$\dim \text{Bild } A = \text{Rang } A = \text{Anzahl Pivotvariablen} \quad (1)$$

gilt. Es folgt daraus, dass (a), (b) und (d) äquivalent sind. Falls (d) gilt, dann folgt aus (1), dass $\dim \text{Bild } A = 2$ ist. Daher passt (c) nicht zu den anderen Aussagen.

Siehe nächstes Blatt!

5. Für welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist $\langle x, y \rangle := x^\top A y$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

✓ (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Erklärung: Die Matrix bei (a) ist nicht symmetrisch, daher kann es sich nicht um ein Skalarprodukt handeln. Die Matrix bei (b) hat einen negativen Eigenwert: Für $x = (0, 1, 0)$ wird daher $\langle x, x \rangle < 0$. Die Matrix bei (c) ist singulär, hat also den Eigenwert 0. Für einen Eigenvektor x zum Eigenwert 0 ist daher $\langle x, x \rangle = 0$. Für (d) gelten deutlich Symmetrie (aus $x^\top A y = (x^\top A y)^\top = y^\top A^\top x = y^\top A x$) und Bilinearität. Für positive Definitheit verwenden wir das Kriterium von Hurwitz, aus dem es folgt, dass A positiv definit ist, genau dann, wenn die Determinanten von A und $A' := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ beide positiv sind. Aus direkter Berechnung finden wir $\det A = 16$ und $\det A' = 8$. Somit liegt ein Skalarprodukt vor.

6. Was hat eine Matrix stets mit all ihren Potenzen gemeinsam?

- (a) Die Eigenwerte.
- ✓ (b) Die Eigenvektoren.
- (c) Den Rang.
- (d) Die Determinante.

Erklärung: Sei A eine Matrix. Falls v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann gilt nach Induktion

$$A^n v = A^{n-1}(Av) = A^{n-1}(\lambda v) = \lambda^n v.$$

Deshalb stimmt (a) für $\lambda \neq 1$ nicht. Es folgt jedoch aus der gleichen Formel, dass (b) gilt. Falls $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist $\text{Rang } A = 1$. Da A^2 gleich der Nullmatrix ist, muss $\text{Rang } A^2 = 0$ sein, und (c) ist deshalb falsch. Für (d) haben wir die Formel $\det AB = \det A \det B$. Nach Induktion folgt daraus, dass $\det A^n = (\det A)^n$ ist. Deshalb stimmt (d) nicht in dem Fall, wo $\det A \neq 1$ ist.

7. Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -8 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- (a) 3, 7, 5
- (b) 3, -8, 1
- ✓ (c) 2, 6, 7
- (d) 0, 7

Erklärung: Berechnen wir das charakterische Polynom der Matrix:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ -8 & 7-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)[(3-\lambda)(5-\lambda)-3] = (2-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda).$$

Es folgt daraus, dass (c) richtig ist.

Siehe nächstes Blatt!

8. Für eine Matrix A existiere ein $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, derart dass $A^k = 0$ gilt. Was lässt sich daraus für A schliessen?

- ✓ (a) Alle Eigenwerte von A sind 0.
- (b) A hat 0 als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit k .
- (c) $\dim \text{Bild}(A) = 0$.
- (d) A ist diagonalisierbar.

Erklärung: Für die $n \times n$ -Nullmatrix gilt die Aussage für $k = 1$. Dennoch hat A den Eigenwert 0 mit algebraischer VF n . (b) ist deshalb falsch, solange $n > 1$ ist. (c) ist falsch, denn für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $A^2 = 0$, aber $\dim \text{Bild}(A) = 1$. Dieselbe A zeigt, dass (d) auch falsch ist. (a) ist hingegen richtig. Sei A eine Matrix mit $A^k = 0$ und v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Es gilt $A^n v = \lambda^n v$ für alle $n > 0$. Für $n = k$ muss deshalb $\lambda^k = 0$ gelten. Es folgt daraus, dass $\lambda = 0$ ist.

9. Was gilt für die Eigenwerte einer Drehmatrix¹ $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

- (a) Sie sind reell.
- (b) Sie sind alle positiv, das heisst R ist positiv definit.
- ✓ (c) Mindestens einer davon ist gleich 1.
- (d) Mindestens einer davon ist gleich 0.

Erklärung: Betrachte zum Beispiel die Givens-Rotation

$$R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von R ist $p_R(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$, dessen Nullstellen $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ und $\lambda_3 = 1$ die Eigenwerte von R sind. Es folgt daraus, dass (a), (b) und (d) falsch sind.

Sei jetzt R eine beliebige Drehmatrix mit Eigenwerten λ_1, λ_2 und λ_3 . Die λ_i sind die Nullstellen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten. Es gibt deshalb zwei Fälle für die Eigenwerte:

- i. Die λ_i sind alle reell.
- ii. Zwei davon sind ein konjugiert-komplexes Paar und einer davon ist reell.

Wir wissen aus der Vorlesung, dass für die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix gilt

$$|\lambda_i| = 1. \tag{2}$$

Zudem gilt

$$\det R = 1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \tag{3}$$

Im Fall i. muss wegen (2) $\lambda_i = \pm 1$ gelten. Wegen (3) muss einer davon gleich 1 sein. Im Fall ii. nehmen wir an, dass $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ ist, und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Aus (2) haben wir $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 = 1$ und deshalb, dass $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ist. Dann muss wegen (3) $\lambda_3 = 1$ sein. Somit ist (c) richtig.

¹ R ist orthogonal mit $\det R = 1$.

10. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$?

(a) $(0, 1, 1)^\top$

✓ (b) $(1, 2, 1)^\top$

(c) $(1, 1, 1)^\top$

(d) $(1, 0, 1)^\top$

Erklärung: Aus direkter Berechnung bekommt man

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor in (b) ist deshalb ein Eigenvektor (zum Eigenwert 1).

11. Eine Basis des Bildes von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

wird gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

✓ (d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Um eine Basis des Bildes zu bestimmen, müssen wir zuerst den Rang der Matrix finden. Mit dem Gauss-Verfahren bekommt man:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Bild hat deshalb Dimension 2. Je zwei linear unabhängige Spalten der Matrix ergeben daher eine Basis des Bildes. Daher ist (d) richtig. (a) ist sicher falsch, denn dies sind 3 Vektoren. Die Vektoren in (b) und (c) liegen nicht im Bild.

Siehe nächstes Blatt!

12. Eine Basis des Kerns von

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

✓ (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Erklärung: Es folgt aus der Lösung der vorstehenden Aufgabe, dass $\dim \text{Kern} = 2$ ist. Da der Kern ein Unterraum von \mathbb{R}^4 ist, sind deshalb nur (b) und (c) möglich. Eine direkte Berechnung bestätigt, dass die Vektoren in (b) im Kern enthalten sind.

13. Sei $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen. Welche der folgenden Teilmengen von V ist ein Untervektorraum?

(a) $U = \{A \in V \mid A \text{ ist diagonalisierbar}\}$

(b) $U = \{A \in V \mid \det(A) = 1\}$

(c) $U = \left\{A \in V \mid A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\right\}$

✓ (d) $U = \{A \in V \mid A^\top = -A\}$

Erklärung: Nehmen wir das Beispiel $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A ist schon diagonal und B ist diagonalisierbar, da die Eigenwerte verschieden sind. Die Summe $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist aber nicht diagonalisierbar. Deshalb ist (a) falsch. (b) und (c) sind auch falsch, denn in beiden Fällen ist $0 \notin U$. (d) ist richtig. Wir haben $0 \in U$, und für alle $A, B \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top = -A - \lambda B = -(A + \lambda B).$$

Es folgt daraus, dass $A + \lambda B$ auch in U ist und damit, dass U ein Unterraum von V ist.

14. Welche Aussage trifft auf jede symmetrische reelle Matrix zu?

(a) Die Spalten sind orthonormale Einheitsvektoren.

(b) Alle Einträge ausser diejenigen auf der Diagonalen sind null.

✓ (c) Die Matrix ist diagonalisierbar.

(d) Die Matrix ist invertierbar.

Erklärung: (a) ist falsch, denn die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist zwar symmetrisch, aber die Spalten haben Norm gleich 2, und sind deshalb keine Einheitsvektoren. (b) und (d) sind auch falsch, denn die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist offensichtlich symmetrisch aber nicht invertierbar. (c) ist wahr. Wir wissen aus der Vorlesung, dass symmetrische reelle Matrizen halbeinfach, also diagonalisierbar, sind.

Siehe nächstes Blatt!

15. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit charakteristischen Polynomen $p_A(x)$ bzw. $p_B(x)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt mit Sicherheit?

- (a) Ist $f(x)$ ein Polynom, derart dass $f(A) = 0$ ist, dann gilt $f = p_A$.
- (b) Wenn $p_A(x) = p_B(x)$ ist, dann sind A und B ähnlich.
- (c) Wenn p_A eine Nullstelle mit Vielfachheit > 1 hat, dann hat A keine Eigenbasis.
- ✓ (d) Wenn A invertierbar ist, dann gilt $p_{AB}(x) = p_{BA}(x)$.

Erklärung: Wir wissen, dass $p_A(A) = 0$ gilt. Da für $f := p_A^2$ auch $f(A) = 0$ gilt, ist (a) falsch. (b) ist auch falsch. Die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haben offensichtlich dasselbe charakteristische Polynom, aber, da B nicht diagonalisierbar ist, sind A und B nicht ähnlich. (c) stimmt nicht, denn dieselbe Matrix A hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 aber hat trotzdem eine Eigenbasis (die Standardbasis von \mathbb{R}^2). Falls A invertierbar ist, hat man $AB = A(BA)A^{-1}$. Deshalb sind AB und BA ähnlich. Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben, ist (d) richtig.

16. Welche der folgenden Aussagen ist für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ richtig?

- (a) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch $A + B$ diagonalisierbar.
- (b) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch AB diagonalisierbar.
- ✓ (c) Ist A halbeinfach, so auch A^2 .
- (d) Sei v ein Eigenvektor von A , und sei w ein Eigenvektor von B . Dann ist $v + w$ ein Eigenvektor von $A + B$.

Erklärung: (a) ist falsch, denn für $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar. (b) ist auch falsch: Wenn $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind, hat man $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sei jetzt $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A hat den Eigenvektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und B hat den Eigenvektor $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$(A + B)(v + w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist $v + w$ kein Eigenvektor von $A + B$ und (d) ist falsch. (c) ist richtig: Eine komplexe Matrix ist halbeinfach genau dann, wenn sie diagonalisierbar ist. Sei A halbeinfach und sei T derart, dass $TAT^{-1} = D$ ist für eine diagonale Matrix D . Dann gilt

$$TA^2T^{-1} = TA(T^{-1}T)AT^{-1} = D^2.$$

A^2 ist deshalb diagonalisierbar, wenn A halbeinfach ist.

17. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- (a) Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.
- ✓ (b) Sei $\omega \neq 0$. Dann ist $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.
- (c) Sind y_1 und y_2 unterschiedliche von Null verschiedene Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, dann sind sie linear unabhängig.
- (d) $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 1$.

Erklärung: (a) ist falsch: $y(x) = e^{ax}$ ist eine spezielle Lösung von $y' = ay$. Für $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist aber auch $y(x) = ce^{ax}$ eine Lösung. Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ lautet daher nicht $y(x) = e^{ax}$, sondern $y(x) = ce^{ax}$. (c) ist sicher falsch: Falls y_1 eine Lösung einer Differentialgleichung ist, dann ist $y_2 := \lambda y_1$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Lösung, und y_1 und y_2 sind offensichtlich linear abhängig. Eine einfache Berechnung zeigt, dass (d) auch falsch ist. Wir wissen immerhin, dass $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$ lösen. (b) ist hingegen richtig, denn es gilt

$$(e^{\omega x})'' = (\omega e^{\omega x})' = \omega^2 e^{\omega x}$$

und

$$(e^{-\omega x})'' = (-\omega e^{-\omega x})' = \omega^2 e^{-\omega x}$$

Daher sind $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ Lösungen von $y'' - \omega^2 y = 0$. Da diese beiden Funktionen linear unabhängig sind und $y'' - \omega^2 y = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, müssen diese Funktionen den Lösungsraum von $y'' - \omega^2 y = 0$ aufspannen. Die allgemeine Lösung lautet also tatsächlich

$$y(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x}.$$

18. Welche Dimension hat der Lösungsraum des folgenden Differentialgleichungssystems?

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + y_2' \\ y_2''' &= y_1'\end{aligned}$$

(a) 2

(b) 3

✓ (c) 5

(d) 6

Erklärung: Das gegebene Differentialgleichungssystem kann durch die Substitution

$$Z := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ y_2 \\ y_2' \\ y_2'' \end{pmatrix}$$

auf das System 1. Ordnung

$$Z' = AZ$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

zurückgeführt werden. Nach einem Satz aus der Vorlesung hat der Lösungsraum dieses System die Dimension 5. Daher hat auch der Lösungsraum des gegebenen Differentialgleichungssystems die Dimension 5.

Siehe nächstes Blatt!

19. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) $x_1^2 + x_2$ ist eine quadratische Form.
- (b) $2x_1x_2$ ist eine positiv definite quadratische Form.
- ✓ (c) $2x_1x_2$ wird durch die Hauptachsentransformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$.
- (d) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist $q(x_1, x_2) := (x_1, x_2)^\top A(x_1, x_2)$ eine quadratische Form und der durch $q(x_1, x_2) = 1$ definierte Kegelschnitt eine Ellipse.

Erklärung: (c) ist richtig: es gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)\right)^2 = 2x_1x_2.$$

Daher wird $2x_1x_2$ durch die Transformation $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$ zur rein quadratischen Form $y_1^2 - y_2^2$. Diese Transformation ist von der Form $y = Tx$ für die orthogonale Matrix $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (die Spalten bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2). Daher handelt es sich um eine Hauptachsentransformation. Diese quadratische Form nimmt daher sowohl positive wie auch negative Werte an. Sie ist also indefinit und insbesondere nicht positiv definit, und (b) ist falsch. (a) ist falsch, denn eine allgemeine quadratische Form auf \mathbb{R}^2 ist von der Form

$$q_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)^\top A(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

für eine symmetrische, reelle Matrix $A = (a_{ij})$. Die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2$ ist nicht von dieser Form. Für (d) berechnen wir

$$q(x_1, x_2) = (x_1, x_2)^\top A(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 - x_2^2 - x_1x_2 = x_1^2 - x_2^2.$$

Es folgt daraus, dass q zwar eine quadratische Form ist, aber der Kegelschnitt ist keine Ellipse, sondern eine Hyperbel.

20. Seien S_I und S_H die Lösungsräume einer linearen, (echt) inhomogenen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ✓ (a) $S_I \cap S_H$ ist leer.
- (b) $S_H \cap S_I = \{0\}$.
- (c) $S_H \cap S_I$ ist ein Vektorraum.
- (d) $0 \in S_H \cap S_I$.

Erklärung: Eine echt inhomogene lineare Differentialgleichung ist von der Form

$$y^{(n)} = a_0y + a_1y' + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)} + f,$$

wobei $a_i = a_i(x)$ und $f = f(x)$ stetige Funktionen sind und f nicht die Nullfunktion ist. Für eine Lösung $y = y(x)$ einer solchen Differentialgleichung gilt

$$y^{(n)} \neq a_0y + a_1y' + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)},$$

weil f nicht die Nullfunktion ist, d.h. y ist keine Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0y + a_1y' + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)}.$$

Es gibt also keine Funktionen, die gleichzeitig Lösung einer echt inhomogenen linearen und der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung sind. Somit ist $S_H \cap S_I$ leer. Daher ist $S_H \cap S_I$ verschieden von $\{0\}$ und auch kein Vektorraum, weil Vektorräume nach Definition nicht leer sind.

21. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von A . Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.
- b) [1 Punkt] Finden Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $T^{-1}AT = D$ gilt.
- c) [2 Punkte] Kann die Matrix T in b) orthogonal gewählt werden? Begründen Sie ihre Antwort. Wenn ja, geben Sie ein solches T an.
- d) [3 Punkte] Berechnen Sie $(A^{-1})^4$.

Lösung:

- a) Wir berechnen die Eigenwerte mit der Entwicklung der Determinante nach der zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_4) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2((1-\lambda)^2 - 4) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)(-3+\lambda). \end{aligned}$$

Die Matrix A hat somit die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 3$ mit algebraischen Vielfachheiten 2, 1 und 1. Lösen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I_4)x = 0$ liefert die Eigenräume:

$$E_1 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-1} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2 und diejenige der Eigenwerte -1 und 3 gleich 1.

Bitte wenden!

b) Gemäss der Berechnung der Eigenvektoren in a) gilt $D = T^{-1}AT$ für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Ja, T kann orthogonal gewählt werden, weil A symmetrisch ist. In diesem Fall muss man nur noch die dritte und vierte Spalte normieren, weil die Spalten bereits orthogonal aufeinander stehen. Daher ist ein solches T durch

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

gegeben.

d) Es gilt $A^{-1} = TD^{-1}T^{-1}$. Da D diagonal ist, müssen wir nur die Einträge auf der Diagonale invertieren, um D^{-1} zu bestimmen. Daher ist

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Sei T wie in der Teilaufgabe a). Um T^{-1} zu bestimmen, können wir zB. das Gauss-Verfahren anwenden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} (A^{-1})^4 &= (TD^{-1}T^{-1})^4 = TD^{-1}(T^{-1}T)D^{-1}(T^{-1}T)D^{-1}(T^{-1}T)D^{-1}T^{-1} = T(D^{-1})^4T^{-1} \\ &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{81} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{41}{81} & 0 & 0 & -\frac{40}{81} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{40}{81} & 0 & 0 & \frac{41}{81} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

22. [10 Punkte] Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{Span}\{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

- a) **[3 Punkte]** Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
- b) **[2 Punkte]** Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf der Basis $\mathcal{B} := \{1, x, x^2\}$ von U **in der gegebenen Reihenfolge** an, um eine Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{B}}$ von U zu erhalten.
- c) **[2 Punkte]** Vervollständigen Sie $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer Orthonormalbasis $\hat{\mathcal{C}}$ von V .
- d) **[3 Punkte]** Sei $\pi: V \rightarrow V$ die Orthogonalprojektion auf U . Sei $\mathcal{C} = \{c_1 := 1, c_2 := x, c_3 := x^2, c_4 := e^x\}$. Was ist die Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ von π bezüglich der Basis \mathcal{C} ?

Lösung:

- a) Es sind i) Symmetrie, ii) Bilinearität und iii) positive Definitheit zu prüfen.

i)

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0) \\ &= g(0)f(0) + g'(0)f'(0) + g''(0)f''(0) + g'''(0)f'''(0) = \langle g, f \rangle. \end{aligned}$$

- ii) Wegen Symmetrie reicht es die Linearität im ersten Argument zu prüfen.

$$\begin{aligned} \langle \lambda f + g, h \rangle &= [\lambda f + g](0)h(0) + [\lambda f + g]'(0)h'(0) \\ &\quad + [\lambda f + g]''(0)h''(0) + [\lambda f + g]'''(0)h'''(0) \\ &= (\lambda f(0) + g(0))h(0) + (\lambda f'(0) + g'(0))h'(0) \\ &\quad + (\lambda f''(0) + g''(0))h''(0) + (\lambda f'''(0) + g'''(0))h'''(0) \\ &= \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \end{aligned}$$

Bemerkung: Man darf die Bedingungen $\langle f, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle$ und $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ einzeln prüfen.

- iii) Offensichtlich gilt $\langle f, f \rangle \geq 0$ und $\langle 0, 0 \rangle = 0$; es bleibt $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ zu zeigen. Ein beliebiges $f \in V$ lässt sich als $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3e^x$ schreiben. Die Gleichung $\langle f, f \rangle = 0$, also $f(0)^2 + f'(0)^2 + f''(0)^2 + f'''(0)^2 = 0$, ist äquivalent zum Gleichungssystem $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ und mit dem obigen Ausdruck für f ergibt dies $a_0 + a_3 = 0$, $a_1 + a_3 = 0$, $2a_2 + a_3 = 0$ und $a_3 = 0$. Es folgt $a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ und somit $f \equiv 0$.

Bitte wenden!

b) Die ersten beiden Vektoren 1 und x sind bereits normiert und orthogonal zueinander wegen

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

und

$$\langle 1, x \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Nun sind sogar

$$\langle 1, x^2 \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0$$

und

$$\langle x, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 0,$$

und wir müssen nur noch x^2 normieren. Da

$$\langle x^2, x^2 \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 4$$

ist, ist $\hat{\mathcal{B}} = \{1, x, \frac{x^2}{2}\}$ eine Orthonormalbasis von U .

c) Um $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer ONB von V zu ergänzen, muss man nur einen Vektor in $V \setminus U$ auswählen und das Gram-Schmidtische Orthogonalisierungsverfahren anwenden. Eine logische Auswahl wäre e^x . Nach Gram-Schmidt ist

$$v := e^x - \langle e^x, 1 \rangle - \langle e^x, x \rangle x - \langle e^x, \frac{x^2}{2} \rangle \frac{x^2}{2}$$

ein Vektor, dessen Normierung \hat{v} die Basis $\hat{\mathcal{B}}$ zu einer ONB von V ergänzt. Die Berechnung ergibt

$$v = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

Es gilt $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = 1$. Deshalb ist v schon normiert und $\hat{v} = v$. Die Basis

$$\hat{\mathcal{C}} = \left\{ 1, x, \frac{x^2}{2}, e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right\}$$

ist daher eine ONB von V .

d) Die Darstellungsmatrix von π bezüglich $\hat{\mathcal{C}}$ ist gegeben durch

$$[\pi]_{\hat{\mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ zu bestimmen, brauchen wir die Übergangsmatrix $T := T_{\mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}}$, welche Koordinaten bezüglich \mathcal{C} auf Koordination bezüglich $\hat{\mathcal{C}}$ abbildet, und ihre Inverse T^{-1} . Die j -te Spalte der Matrix T entspricht dem Koordinatenvektor von c_j bezüglich $\hat{\mathcal{C}}$. Das heisst:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Man kann T^{-1} auf verschiedene Arten berechnen (z.B. das Gauss-Jordan-Verfahren). Am einfachsten findet man T^{-1} direkt aus den Koeffizienten, die in der Basis $\hat{\mathcal{C}}$ auftauchen. Es gilt

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann bekommen wir

$$[\pi]_{\mathcal{C}} = T^{-1}[\pi]_{\hat{\mathcal{C}}}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Variante: Man könnte auch bemerken, dass auf $U = \text{Span}\{1, x, x^2\}$ die Projektion π die Identitätsabbildung ist, und die Matrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ deshalb von $\pi(e^x)$ bestimmt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \pi(e^x) &= \pi\left((e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}) + 1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \\ &= \pi(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}) + \pi(1 + x + \frac{x^2}{2}) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

In den Koordinaten bezüglich \mathcal{C} heisst es, dass $[\pi(e_j)]_{\mathcal{C}} = (1, 1, \frac{1}{2}, 0)^\top$. Wir bekommen dieselbe Darstellungsmatrix $[\pi]_{\mathcal{C}}$ wie oben durch die Gleichung

$$[\pi]_{\mathcal{C}} = ([\pi(c_1)]_{\mathcal{C}} \mid [\pi(c_2)]_{\mathcal{C}} \mid [\pi(c_3)]_{\mathcal{C}} \mid [\pi(c_4)]_{\mathcal{C}}),$$

die Matrix, deren j -te Spalte dem Vektor $\pi(c_j)$ bezüglich \mathcal{C} entspricht.

23. [10 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(t) = -8y(t) + 4y'(t). \quad (*)$$

- a) **[2 Punkte]** Verwandeln Sie (*) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- b) **[6 Punkte]** Geben Sie die allgemeine reelle Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- c) **[2 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösung von (*) zu den Bedingungen $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = 1$.

Lösung:

- a) Sei $z(t) := y'(t)$. Dann ist die Differentialgleichung $y''(t) = -8y(t) + 4y'(t)$ zum System

$$\begin{cases} y'(t) = & z(t) \\ z'(t) = & -8y(t) + 4z(t) \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

äquivalent. Weil $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist, ist die Dimension des Lösungsraumes gleich zwei.

- b) Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 8$. Wir berechnen nun die Eigenwerte von A , d.h. die Nullstellen von p_A , und erhalten $\lambda_1 = 2+2i$ und $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 2-2i$. Wir bestimmen den Eigenraum von A zu einer der zwei konjugierten Nullstellen, z.B. zu $\lambda_1 = 2 + 2i$, indem wir das Gleichungssystem $(A - \lambda_1 \mathbb{I}_2)x = 0$ lösen:

$$A - \lambda_1 \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} -(2+2i) & 1 \\ -8 & 2-2i \end{pmatrix}$$

Also ist der Eigenraum $E_{2+2i} = \text{Span}\{(1-i, 4)^\top\}$. Dann wissen wir aus der Vorlesung, dass $e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Lösung des DGS ist. Es gilt

$$e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 4 \cos 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ 4 \sin 2t \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Real- und der Imaginärteil davon sind linear unabhängige reelle Lösungen. Da die Dimension des Lösungsraums gleich zwei ist, folgt es daraus, dass die allgemeine reelle Lösung von (*) durch

$$y(t) = e^{2t} \{ (a(\cos 2t + \sin 2t) + b(\sin 2t - \cos 2t)) \} = e^{2t} \{ (a-b) \cos 2t + (a+b) \sin 2t \}$$

gegeben wird.

- c) Die Bedingungen ergeben:

$$y(0) = a - b = 1 \quad \text{und} \quad y(\pi/4) = e^{\pi/2}(a + b) = 1.$$

Man findet durch Einsetzen die gesuchte Lösung: $y(t) = e^{2t} \{ \cos 2t + e^{-\pi/2} \sin 2t \}$.