

Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/6 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1/3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1/3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Entweder Ausschlussverfahren, indem man einige Einträge des Produktes von A mit den vorgeschlagenen Matrizen berechnet, oder das Gauss-Jordan-Verfahren auf A anwenden.

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 4 , so dass $p(1) = 1$.

(B) Die Menge der invertierbaren 3×3 Matrizen.

(C) Die Menge $\{(2x + y, y, y - x)^T : x, y \in \mathbb{R}\}.$

(D) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}.$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Man sieht schnell, dass der Nullvektor nicht zu den Mengen bei (A), (B) und (D) gehört.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = a \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- (A) $a = -4$.
- (B) $a = 4$.
- (C) $a = 8$.
- (D) $a = -8$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Das Gauss-Verfahren liefert

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & & 3 \\ 0 & 7/2 & & a - 9/2 \\ 0 & -1 & & -1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & & 3 \\ 0 & 7/2 & & a - 9/2 \\ 0 & 0 & & \frac{2}{7}a - \frac{16}{7} \end{array}$$

$$\text{Dann } a = \frac{7}{2} \cdot \frac{16}{7} = 8.$$

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt im Allgemeinen ...

- (A) $\det(A^T) = -\det(A)$.
- (B) Wenn $A^2 = 2\mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 2$.
- (C) Wenn $A^3 = \mathbb{I}$, dann ist $\det(A) = 1$.
- (D) Wenn A symmetrisch und invertierbar ist, dann ist $\det(A) = \det(A^{-1})$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Es gilt nämlich $1 = \det(\mathbb{I}) = \det(A^3) = (\det A)^3$.

(B) schliesst man aus, denn

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}^2 = 2\mathbb{I} \quad \text{aber} \quad \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -2.$$

Die Identitätsmatrix \mathbb{I} ist ein Gegenbeispiel für (A), und $2\mathbb{I}$ ist ein Gegenbeispiel für (D).

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei die folgende lineare Differentialgleichung:

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 4.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (D) gemäss einem Satz aus der Vorlesung.

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$ ist

- (A) positiv definit.
- (B) negativ definit.
- (C) indefinit.
- (D) positiv semidefinit.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (D). Die zugehörige Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit.
Oder so: $2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 = 2(x_1 - x_2)^2$.

1.MC7 [1 Punkt] Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $-A^T$?

- (A) 3, -1, 1/2.
- (B) -3, 1, -1/2.
- (C) 1/3, 1, -2.
- (D) -1/3, -1, -2.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (B), denn $-A$ und $-A^T$ haben die gleiche Eigenwerte. Oder direkt:
 $-A^T = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ ist eine Dreiecksmatrix mit $-3, 1, -1/2$ auf der Diagonale, also mit Eigenwerte $-3, 1, -1/2$.

1.MC8 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Basen $\{e_1 + e_2, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 und $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 ist ...

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(C) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Die Bilder der Basisvektoren sind

$$f(e_1 + e_2) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2e_2 + 2e_3$$

$$f(e_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

also ist die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

1.MC9 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor der

Matrix A ?

(A) $(1, 2, 0)^T$.

(B) $(3, 1, -1)^T$.

(C) $(-1, 1, 0)^T$.

(D) $(1, 3, 2)^T$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C), denn

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(A), (B) und (D) schliesst man aus, indem man einige Einträge des Produktes von A mit den vorgeschlagenen Vektoren berechnet.

1.MC10 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

(A) Es existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so dass $f(x) = Ax$.

(B) $\dim(\text{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.

(C) Wenn $\ker(f) \perp \ker(g)$, dann folgt $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = m$.

(D) Wenn $n \geq m$ und $\dim(\ker(f)) = n - m$, dann ist f surjektiv.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (D). Aus dem Dimensionssatz gilt $n = \dim \ker(f) + \dim \text{im}(f) = n - m + \dim \text{im}(f)$. Es folgt dass $\dim \text{im}(f) = m$, das heisst f ist surjektiv.

(A) ist falsch, denn die Matrix A soll in $\mathbb{R}^{m \times n}$ sein. Für (B) betrachte z.B die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x)^T$ mit $\dim(\text{im}(f)) = 1$ und $\dim(\ker(f)) = 0$. Für (C) betrachte z.B $f = g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, dann ist $m = 1$ und $\dim(\text{im}(f)) + \dim(\text{im}(g)) = 2$.

1.MC11 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Dann ist die Determinante von A^{-1} gleich ...

(A) 2

(B) -1

(C) 1/2

(D) -1/2

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Es gilt $\det(A) = 2$, also $\det(A^{-1}) = 1/2$.

1.MC12 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = \mathbb{I}$, dann gilt $A = B^{-1}$.
- (B) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det(A) = -\det(B)$.
- (C) $\det(-A) = -\det(A)$.
- (D) Wenn $\det(A + B) = 1$, dann ist A oder B invertierbar.

Lösung:

Die richtige Lösung ist (A).

Ein Gegenbeispiel für (B) ist z.B. A die Nullmatrix und $B = \mathbb{I}$. Für (C) gilt $\det(-A) = \det(A)$, und für (D) betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.MC13 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $f(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Dimension des Kerns von f gleich ...

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 0.

Lösung:

Die richtige Lösung ist (B). Die Matrix A besitzt zwei linear unabhängige Zeilenvektoren, also $\dim \operatorname{im}(f) = 2$ und aus dem Dimensionssatz $\dim(\ker(f)) = 4 - 2 = 2$.
Alternative: Gauss-Elimination.

1.MC14 [1 Punkt] Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ hat bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}}$ bezüglich der Standardbasis gleich ...

- (A) $(-1, 5, 0)^T$.
- (B) $(-5, 1, 0)^T$.
- (C) $(0, 5, -1)^T$.
- (D) $(0, -1, 5)^T$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C). Wir berechnen

$$[v]_{\mathcal{E}} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 6 + 1 \\ 0 + 6 - 1 \\ -2 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (A) $((AB)^2)^T = (B^T A^T)^2$.
- (B) $((AB)^2)^T = (B^T)^2 (A^T)^2$.
- (C) $((AB)^2)^T = (A^T)^2 (B^T)^2$.
- (D) $((AB)^2)^T = (A^T B^T)^2$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A): $((AB)^2)^T = (ABAB)^T = B^T A^T B^T A^T = (B^T A^T)^2$.

1.MC16 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht** für eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (A) Wenn A^{-1} diagonalisierbar ist, dann ist A auch diagonalisierbar.
- (B) Wenn v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert $1/\lambda$.
- (C) Alle Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.
- (D) Alle Eigenräume von A haben Dimension 1.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (D). Die Aussagen (A), (B) und (C) sind richtig und (D) ist im Allgemeinen falsch: z.B. $E_1(\mathbb{I}) = \mathbb{R}^n$.

1.MC17 [1 Punkt] Welcher der folgenden Ausdrücke definiert **kein** Skalarprodukt auf dem Vektorraum \mathcal{P}_2 der Polynome von Grad ≤ 2 ?

- (A) $\langle p, q \rangle = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$.
(B) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^0 p(x)q(x)dx + \int_1^2 p(x)q(x)dx$.
(C) $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)e^{-x}dx$.
(D) $\langle p, q \rangle = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (D). Es ist leicht zu sehen, dass die Ausdrücke in (A), (B) und (C) linear, symmetrisch und positiv definit sind. Der Ausdruck in (D) ist nicht positiv definit, z.B. für $p = x^2 - 1 \neq 0$ gilt $\langle p, p \rangle_{(D)} = 0$.

1.MC18 [1 Punkt] Sei P_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 , ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2.$$

Die Orthogonalprojektion von $x^2 + x + 1$ auf den Unterraum $\text{span}(3x - 1)$ bezüglich des Skalarprodukts ist ...

- (A) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$.
(B) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.
(C) $\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + 2$.
(D) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A). Wir berechnen

$$\pi_{3x-1}(x^2 + x + 1) = \frac{\langle x^2 + x + 1, 3x - 1 \rangle}{\langle 3x - 1, 3x - 1 \rangle}(3x - 1) = \frac{0 + 3 - 1}{9 + 1}(3x - 1) = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}.$$

Oder: (B), (C) und (D) schliesst man aus, indem die vorgeschlagenen Vektoren nicht im $\text{span}(3x - 1)$ liegen.

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Abbildungen f ist linear?

- (A) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x.$
- (B) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto A + \mathbb{I}_2.$
- (C) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a.$
- (D) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t + 1)^T.$

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (C).

Die Abbildung in (A) ist nicht linear, denn $f(2) = 5 \neq 4 = f(1) + f(1)$. Die Abbildungen aus (B) und (D) sind nicht linear, denn $f(0) \neq 0$.

1.MC20 [1 Punkt] Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch?

- (A) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp v_3$.
- (B) Wenn $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$, dann ist $v_1 \perp (v_2 - v_3)$.
- (C) Wenn $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp -v_2$.
- (D) Wenn $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$, dann ist $v_1 \perp v_3$.

Lösung:

Die korrekte Lösung ist (A), betrachte z.B. $v_1 = v_3 \perp v_2$.

Es folgt aus Homogenität und Linearität des Skalarprodukt in beiden Argumenten, dass die Aussagen (B),(C),(D) wahr sind.

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 2$. Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A_2 .
- (b) [3 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k invertierbar? Finden Sie eine Basis von $\ker(A_k)$ für alle Werte k für welche A_k nicht invertierbar ist.
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte k ist A_k diagonalisierbar?

Lösung:

(a) Mit $k = 2$ ist die Matrix:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$P_{A_2}(x) = \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -3 & x-4 \end{pmatrix} = (x-2)^2(x-4)$$

und die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$.

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ zu finden, lösen wir das Gleichungssystem $(A_2 - 2\mathbb{I})v = 0$ mit dem Gauss-Verfahren:

$$A_2 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Also ist $(1, 0, 0)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Um einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ zu finden, lösen wir das Gleichungssystem $(A_2 - 4\mathbb{I})v = 0$ mit dem Gauss-Verfahren:

$$A_2 - 4\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

also ist $(-\frac{1}{2}, 0, 1)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

(b)

$$\det \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} = 2k(k+2).$$

Das heisst, A_k ist invertierbar genau dann wenn $k \neq 0, -2$.

Falls $k = 0$ lösen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und bekommen $y = z = 0$, also $\ker(A_0) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T\}$.

Falls $k = -2$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bekommt man $y = 0$ und $z = -2x$, also $\ker(A_{-2}) = \text{span}\{(1, 0, -2)^T\}$.

(c) Das charakteristische Polynom ist

$$P_k(x) = \det \begin{pmatrix} x-k & -1 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & -3 & x-(k+2) \end{pmatrix} = (x-k)(x-2)(x-(k+2)).$$

Falls $k \neq 0, 2$, dann ist A_k diagonalisierbar, denn alle Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1.

Falls $k = 2$, dann ist $P_2(x) = (x-2)^2(x-4)$. Der Eigenvektor $\lambda = 2$ hat algebraische Vielfachheit 2 und aus (a) hat der zugehörigen Eigenraum E_2 Dimension 1.

Falls $k = 0$ dann ist $P_0(x) = x(x-2)^2$. Wir lösen das Gleichungssystem $(A_0 - 2\mathbb{I})v = 0$ für $\lambda = 2$ mit dem Gauss-Verfahren:

$$A_0 - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Also $E_2 = \text{span}\{(-\frac{1}{2}, 0, 1)^T\}$ hat Dimension 1 aber $\lambda = 2$ hat algebraische Vielfachheit 2.

A_0 und A_2 sind also beide **nicht** diagonalisierbar.

22. Sei \mathcal{P}_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 . Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [3 Punkte] Rechnen Sie nach, dass die Polynome $p(x) = -1 - x + 2x^2$ und $q(x) = x + x^2$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [4 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $r(x) = 5 + 5x + 10x^2$ orthogonal auf den Unterraum, der von den Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ aus (a) aufgespannt wird.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Unterraum $(-3 + 5x^2)^\perp$ (das heisst, alle die Polynome, die zu $-3 + 5x^2$ orthogonal sind).

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\langle -1 - x + 2x^2, x + x^2 \rangle \\ = (-1 + 1 + 2)(-1 + 1) + (-1) \cdot 0 + (-1 - 1 + 2)(1 + 1) = 0.\end{aligned}$$

(b) Zuerst berechnen wir die Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}\langle 5 + 5x + 10x^2, -1 - x + 2x^2 \rangle \\ = (5 - 5 + 10)(-1 + 1 + 2) + 5 \cdot (-1) + (5 + 5 + 10)(-1 - 1 + 2) \\ = 10 \cdot 2 - 5 + 0 = 15,\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle 5 + 5x + 10x^2, x + x^2 \rangle \\ = (5 - 5 + 10)(-1 + 1) + 5 \cdot 0 + (5 + 5 + 10)(1 + 1) \\ = 0 + 0 + 40 = 40.\end{aligned}$$

Dann berechnen wir die Normen der Vektoren:

$$\begin{aligned}\| -1 - x + 2x^2 \|^2 &= (-1 + 1 + 2)^2 + (-1)^2 + (-1 - 1 + 2)^2 = 4 + 1 + 0 = 5, \\ \| x + x^2 \|^2 &= (-1 + 1)^2 + 0^2 + (1 + 1)^2 = 4.\end{aligned}$$

Dann ist die Projektion gegeben durch

$$\begin{aligned}& \frac{\langle 5 + 5x + 10x^2, -1 - x + 2x^2 \rangle}{\| -1 - x + 2x^2 \|^2} (-1 - x + 2x^2) + \frac{\langle 5 + 5x + 10x^2, x + x^2 \rangle}{\| x + x^2 \|^2} (x + x^2) \\ &= \frac{15}{5} (-1 - x + 2x^2) + \frac{40}{4} (x + x^2) \\ &= 3(-1 - x + 2x^2) + 10(x + x^2) \\ &= -3 + 7x + 16x^2.\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle a + bx + cx^2, -3 + 5x^2 \rangle &= 0 \\ \iff (a - b + c)2 + a \cdot (-3) + (a + b + c)2 &= 0 \\ \iff 2a - 2b + 2c - 3a + 2a + 2b + 2c &= 0 \\ \iff a + 4c &= 0 \\ \iff c &= -\frac{1}{4}a.\end{aligned}$$

$$\text{Also } (-3 + 5x^2)^\perp = \{a + bx - \tfrac{1}{4}ax^2 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

23. Sei $V = \mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Sei $G : V \rightarrow V$ die lineare Abbildung

$$f(x) \mapsto xf''(x) + 2f'(x) + 2f(x).$$

(a) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[G]_{\mathcal{B}}$.

(b) [2 Punkte] Mit Hilfe von (a), finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$G(f) = 1 + 3x + x^2.$$

(c) [2 Punkte] Betrachten Sie jetzt die Gleichung

$$y'' - 4y' - 5y = 0. \quad (\star)$$

Verwandeln Sie (\star) in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $Y' = AY$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

(d) [3 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung von (\star) mit Hilfe von (c).

Lösung:

(a) Die Bilder der Basisvektoren sind

$$\begin{aligned}G(1) &= 2 \\ G(x) &= 2 + 2x \\ G(x^2) &= x \cdot 2 + 4x + 2x^2 = 6x + 2x^2 \\ G(x^3) &= x \cdot 6x + 6x^2 + 2x^3 = 12x^2 + 2x^3.\end{aligned}$$

Also lautet die Matrix bezüglich \mathcal{B}

$$[G]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es folgt aus (a), dass $G(1 + x^2) = 2 + 6x + 2x^2$, also ist $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ eine Lösung.

- (c) Mit $y_0 = y$ und $y_1 = y'$ erhalten wir $y'_0 = y' = y_1$ und aus $y'' - 4y' - 5y = 0$ bekommen wir $y'_1 - 4y_1 - 5y_0 = 0$, das heisst, $y'_1 = 5y_0 + 4y_1$. Dann schreiben wir (\star) als

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \mathbb{I} \right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(4 - \lambda) - 5 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung von (\star) lautet dann $y(x) = Ce^{5x} + De^{-x}$, wobei $C, D \in \mathbb{R}$.