

D-MAVT/D-MATL

Prüfung Lineare Algebra I/II

401-0171-00L/401-0172-00L

Nachname

XX

Vorname

XX

Legi-Nr.

XX-000-000

Prüfungs-Nr.

000

Bitte noch nicht umblättern!

Beachten Sie die Hinweise auf dem Antwortheft.

Aufgabe 1

Single Choice-Aufgaben

1.MC1 [1 Punkt] Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$?

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 7 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2 & 1/7 & -3/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 4/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 3/7 & -1/7 \\ 0 & -1/7 & 3/7 \\ -2 & 8/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & -1/7 & -3 \\ 0 & 1/7 & 3 \\ -2 & 4/7 & 2 \end{pmatrix}$

1.MC2 [1 Punkt] Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen ein Unterraum eines Vektorraums ist.

(A) Die Menge der Polynome p mit einem Grad ≤ 3 , so dass $p(2) = 0$.

(B) Die Menge der Vektoren $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.

(C) Die Menge $\{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det A = 0\}$.

(D) Die Menge $\{(x - y, x + y + 2, 2x - 3y)^T : x, y \in \mathbb{R}\}$.

1.MC3 [1 Punkt] Für welchen Wert von a besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -1 \\ 2x + y = a \end{cases}$$

(A) $a = 1/2$

(B) $a = 1/3$

(C) $a = -1/3$

(D) $a = 1$

1.MC4 [1 Punkt] Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Dann gilt...

(A) Wenn A invertierbar ist und $A^{-1} = A^T$, dann ist $\det A = \pm 1$.

(B) Wenn $A^T = -A$, dann ist $\det A = -1$.

(C) Wenn $A^3 = 3A$, dann ist $\det A = 3^n$.

(D) $\det(-A) = \det A$.

1.MC5 [1 Punkt] Gegeben sei das folgende homogene lineare Differentialgleichungssystem für $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_1. \end{cases}$$

Welche Vektoren spannen den Lösungsraum auf?

(A) $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

1.MC6 [1 Punkt] Die quadratische Form $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ ist

(A) positiv definit

(B) negative definit

(C) indefinit

(D) positiv semidefinit

1.MC7 [1 Punkt] Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne $F_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(A) Die Abbildung F_A beschreibt eine Translation.

(B) Die Abbildung F_A beschreibt eine Spiegelung.

(C) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x_1 -Achse um 90° .

(D) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x_1 -Achse um 180° .

1.MC8 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Was sind die Eigenwerte von A^T ?

(A) 2, 8, 0

(B) 2, 0

- (C) 2, 1, 0
(D) 1, 0

1.MC9 [1 Punkt] Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x + 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis lautet:

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
(D) $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x + 2z & 0 \\ 0 & 0 & x - y + 2z \end{pmatrix}$

1.MC10 [1 Punkt] Seien $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $C \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist sinnvoll?

- (A) AB
(B) A^2
(C) $A + C$
(D) $A + C^T$

1.MC11 [1 Punkt] Seien $v_1 = (1, 1, 1)^T$, $v_2 = (-1, 0, -2)^T$ Vektoren in \mathbb{R}^3 . Welcher der folgenden Vektoren v ist bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal zu v_1 und zu v_2 ?

- (A) $(0, 1, -1)$
(B) $(-2, 0, 1)$
(C) $(-2, 1, 1)$
(D) $(-2, 1, -1)$

1.MC12 [1 Punkt] Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix A ?

- (A) $(1, 1, 0)$

- (B) $(1, 0, 1)$
- (C) $(2, 1, 1)$
- (D) $(1, 1, 1)$

1.MC13 [1 Punkt] Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen?

- (A) Wenn f invertierbar ist, dann ist f^{-1} linear.
- (B) $\ker(g \circ f) \subseteq \ker f$
- (C) Wenn $\ker f = \ker g$, dann folgt $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$
- (D) $\operatorname{im} f$ ist orthogonal zu $\ker f$.

1.MC14 [1 Punkt] Welchen Wert hat die Determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1+a & a \\ 0 & 0 & -a & 1-a \end{pmatrix}$? Hinweis: Verwenden Sie den Blocksatz.

- (A) 2
- (B) -2
- (C) $-2a^2$
- (D) $-2(1+2a)$

1.MC15 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

- (A) Wenn $AB = 0$, dann gilt $\det A = \det B = 0$.
- (B) Wenn $A^2 = 0$, dann ist $(\mathbb{I} + A)^{-1} = \mathbb{I} - A$.
- (C) Wenn $A = (A^{-1})^T$, dann gilt $\det A = 1$.
- (D) Wenn $\det A = 0$, dann ist A^2 die Nullmatrix.

1.MC16 [1 Punkt] Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine Abbildung $f(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist die Dimension des Bilds von f gleich...

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

1.MC17 [1 Punkt] Neben der Standardbasis \mathcal{E} in \mathbb{R}^2 sei noch die Basis $\mathcal{B} = \{(2, 0)^T, (3, 4)^T\}$ gegeben. Für welche der folgenden Matrizen M , gilt $M[v]_{\mathcal{E}} = [v]_{\mathcal{B}}$ für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$?

- (A) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.MC18 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

(A) $((AB)^{-1})^T = (B^{-1})^T (A^{-1})^T$

(B) $((AB)^{-1})^T = ((BA)^T)^{-1}$

(C) $((AB)^{-1})^T = B^{-1} A^T A^{-1} B^T$

(D) $((AB)^{-1})^T = (A^{-1})^T (B^{-1})^T$

1.MC19 [1 Punkt] Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

(A) Wenn A invertierbar ist, dann ist jeder Eigenwert von A ungleich Null.

(B) Wenn A diagonalisierbar ist, dann ist A^2 auch diagonalisierbar.

(C) Wenn A invertierbar und diagonalisierbar ist, dann ist A^{-1} diagonalisierbar.

(D) Wenn A einen Eigenwert ungleich Null hat, dann ist A invertierbar.

1.MC20 [1 Punkt] Sei V der reelle Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$. Was ist die Abbildungsmatrix $[g]_{\mathcal{B}}$ der Abbildung

$$g : V \longrightarrow V$$

$$y(x) \longmapsto y''(x) + 4y'(x) - 5y(x)?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Textaufgaben

21. Gegeben sei die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} -9 & k & 3 \\ 0 & k & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit einem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Sei $k = 0$. Bestimmen Sie, falls vorhanden, eine orthogonale Matrix T , so dass $T^{-1}A_0T$ diagonal ist.
- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie für $k = -10$, falls vorhanden, zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2 .
- (c) [4 Punkte] Für welche reellen Werte von k ist A_k diagonalisierbar?
22. Sei P_2 der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in P_2$:

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

- (a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass die Polynome $p(x) = 3x^2 - 2$ und $q(x) = x + 1$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind.
- (b) [5 Punkte] Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' zu erhalten.
- (c) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $p(x) = x^2 + x + 1$ orthogonal auf den Unterraum $\text{span}(1, x)$.
23. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

- (a) [2 Punkte] Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System 1. Ordnung, das heisst bringen Sie die Gleichung in die Form $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- (b) [5 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in (a) gefundenen homogenen Systems $Y' = AY$ an und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $Y' = AY + B$ mit $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.