

Basisprüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}ax + (3 + a)y &= a, \\(3 + a)x + 3y &= a,\end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$. Welche Aussage ist richtig?

- (a) Für $a = 2$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- (b) Für $a = 1$ hat das Gleichungssystem zwei Lösungen.
- ✓ (c) Für $a = -3$ hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (d) Für $a = 3$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Bitte wenden!

2. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + 3y - 2z &= 1, \\2x + y + z &= -3, \\3x - y - z &= 2.\end{aligned}$$

Es gilt:

- (a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.
- ✓ (b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- (c) Das lineare Gleichungssystem hat genau zwei unterschiedliche Lösungen.
- (d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

3. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist $\dim(\ker(A))$?

- (a) 0.
- (b) 2.
- ✓ (c) 1.
- (d) 3.

Siehe nächstes Blatt!

4. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welcher der folgenden Vektoren liegt *nicht* im Bild von A?

(a) $(0, 1, 1)^t$.

✓ (b) $(1, -1, 1)^t$.

(c) $(2, 1, -1)^t$.

(d) $(-1, 0, 1)^t$.

5. In \mathbb{R}^2 seien die Basen $\mathcal{B} := (b_1, b_2)$ und $\mathcal{B}' := (b'_1, b'_2)$ gegeben, wobei

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b'_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' ?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

✓ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Bitte wenden!

6. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ?

(a) $(3, 0, 1)^t$

(b) $(-1, 2, 1)^t$

(c) $(2, -1, 0)^t$

✓ (d) $(1, 2, -3)^t$

7. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Was ist $\det(A)$?

(a) 3.

✓ (b) 2.

(c) 4.

(d) -1.

Siehe nächstes Blatt!

8. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $B = A^4$. Wie lautet der Eintrag b_{13} ?

(a) 12.

(b) 4.

(c) 6.

✓ (d) 8.

9. Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{5 \times 5} : A^t = -A\}$$

der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{5 \times 5}$ bestehend aus den schiefsymmetrischen Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\dim(U) = 6$.

(b) $\dim(U) = 15$.

(c) $\dim(U) = 3$.

✓ (d) $\dim(U) = 10$.

Bitte wenden!

10. Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ drei Vektoren. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- (a) Falls die Vektoren u, v, w linear unabhängig sind, dann sind die Vektoren u und v linear unabhängig.
- (b) Falls einer der Vektoren u, v, w der Nullvektor ist, so sind u, v, w linear abhängig.
- (c) Die Vektoren u und v sind linear abhängig genau dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches des andern ist.
- ✓ (d) Falls sowohl u, v wie auch v, w linear unabhängig sind, dann sind u, w linear unabhängig.

11. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne $p_A(\lambda)$ das charakteristische Polynom von A . Welches der folgenden Polynome ist gleich $p_A(\lambda)$?

- ✓ (a) $q(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$.
- (b) $q(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda + 2$.
- (c) $q(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda + 3$.
- (d) $q(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda + 3$.

12. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Arnold's cat map})$$

Welche der folgenden reellen Zahlen ist ein Eigenwert der Matrix A ?

- (a) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$.
- (b) $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{3})$.
- (c) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.
- ✓ (d) $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

13. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Die Abbildung f beschreibt eine Spiegelung.
- (b) Die Abbildung f beschreibt eine Translation.
- ✓ (c) Die Abbildung f beschreibt eine Drehung um die x_2 -Achse um 60° .
- (d) Die Abbildung f beschreibt eine Drehung um die x_1 -Achse um 45° .

14. Welche der folgenden Vektoren ergänzt

$$b_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 ?

(a) $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t$.

✓ (b) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t$.

(c) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$.

(d) $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t$.

15. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren, so dass $\langle u, u \rangle = 1$, $\langle v, v \rangle = 2$ und $\langle u, v \rangle = 0$. Wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 bezeichnet. Was ist

$$\langle 2u + v, u + 2v \rangle?$$

(a) 12.

(b) 3.

✓ (c) 6.

(d) 8.

Siehe nächstes Blatt!

16. Welche der folgenden Abbildungen definiert *kein* Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ?

- ✓ (a) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2.$
- (b) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 4x_2 y_2.$
- (c) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + 2x_2 y_2.$
- (d) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 3x_2 y_2.$

17. Es sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Matrix, so dass $\text{im}(A) \subset \ker(A)$. Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

- (a) $A + A^t = 0.$
- (b) $A - A^t = 0.$
- (c) $A^2 + A = 0.$
- ✓ (d) $A^2 = 0.$

18. Betrachten Sie die Menge

$$M := \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^2 = \mathbb{I}_2\}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- (a) Die Menge M enthält genau vier Elemente.
- ✓ (b) Die Menge M enthält unendlich viele Elemente.
- (c) Die Menge M enthält genau zwei Elemente.
- (d) Die Menge M enthält genau ein Element.

Bitte wenden!

19. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrische, positiv definite Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- ✓ (a) Die Matrix AB ist symmetrisch und positiv definit.
- (b) Die Matrix A^{-1} ist symmetrisch und positiv definit.
- (c) Die Matrix $A + B$ ist symmetrisch und positiv definit.
- (d) Die Matrix $2A$ ist symmetrisch und positiv definit.

20. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- (a) Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts ist immer grösser gleich der geometrischen Vielfachheit.
- (b) Falls $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar ist, dann gilt $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
- ✓ (c) Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ einzig Null als Eigenwert hat, dann ist A gleich der Nullmatrix.
- (d) Falls die Matrix A^t invertierbar ist, dann ist A invertierbar.

21. Betrachten Sie die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne $V \subset \mathbb{R}^4$ den von den Vektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannten Unterraum.

- (a) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie eine Basis von $V \subset \mathbb{R}^4$.
- (b) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $b := (1, -1, 0, 1)^t$ auf V .
- (c) (**3 Punkte**) Wir bezeichnen mit V^\perp alle Vektoren von \mathbb{R}^4 , welche senkrecht auf V stehen. Bestimmen Sie eine Basis von V^\perp .

Erklärung:

- (a) Die Vektoren v_2 und v_3 sind orthogonal und deshalb linear unabhängig. Weiters gilt $v_1 = v_2 + v_3$. Also ist $\{v_2, v_3\}$ eine Basis von V .
- (b) Die orthogonale Projektion von b ist gleich $(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^t$.
- (c) z.B. die Vektoren $(-1, 0, 0, 1)^t, (0, -1, 1, 0)^t$.

Bitte wenden!

22. Gegeben sei die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y'''(t) = 2y''(t) + y'(t) - 2y(t). \quad (1)$$

- (a) (**2 Punkte**) Überführen Sie (1) durch Substitution in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form $z' = Az$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
- (b) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie die Eigenwerte der in Teilaufgabe (a) gefundenen Matrix A .
Bemerkung: Falls die Teilaufgabe (a) nicht gelöst wurde, können Sie mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

weiterrechnen.

- (c) (**5 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).

Erklärung:

- (a) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Die Eigenwerte sind $2, -1, 1$.
- (c) Wir berechnen $v_1 = (1, 2, 4)^t$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$, $v_2 = (1, -1, 1)^t$ Eigenvektor zu $\lambda_2 = -1$ und $v_3 = (1, 1, 1)^t$ Eigenvektor zu $\lambda_3 = 1$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$z(t) = \sum_{i=1}^3 C_i e^{\lambda_i t} v_i \quad (C_i \in \mathbb{R})$$

und somit

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^t \quad (C_i \in \mathbb{R}).$$

Siehe nächstes Blatt!

23. Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) (**3 Punkte**) Berechnen Sie $\det(A)$.
- (b) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A .
- (c) (**3 Punkte**) Für welche Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist A orthogonal?

Erklärung:

- (a) Es gilt $\det(A) = a^2 b^2$.
- (b) Die Eigenwerte sind $1, -a, a, -b, b$.
- (c) A orthogonal impliziert, dass die Spalten orthonormal sind. Falls also A orthogonal ist, dann muss gelten $a \in \{-1, 1\}$ und $b \in \{-1, 1\}$. Man sieht nun leicht, dass für diese Werte von a und b , die Matrix A tatsächlich orthogonal ist. Also A orthogonal genau dann wenn, $a \in \{-1, 1\}$ und $b \in \{-1, 1\}$.

