

Single choice Aufgaben

Die Single-Choice Aufgaben 1-20 haben jeweils vier Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. Kreuzen Sie deshalb in jedem Fall immer eine Antwort an.

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung gegeben durch $f(x, y, z) = (x, y)$ bezüglich die Standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ bzw. $\{e_1, e_2\}$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen $\{e_1, e_2, e_3\}$ von \mathbb{R}^3 und $\{e_1, e_1 + e_2\}$ von \mathbb{R}^2 ist dann...

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

✓ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Für welchen Wert von k besitzt das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & = & 5 \\ & x & - & 3y & = & -1 \\ 3x & + & 4y & = & k \end{array}$$

(a) 1

(b) 2

(c) 5

✓ (d) 10

3. Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Was sind die Eigenwerte von $(A^{-1})^T$?

(a) $-2, 8$ und 5

(b) $2, -8$ und -5

✓ (c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ und $\frac{1}{5}$

(d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}$ und $-\frac{1}{5}$

4. Für welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist $\langle x, y \rangle := x^T A y$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 ?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

✓ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Welcher der folgenden Vektoren ist *kein* Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

✓ (d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Welche Formel gilt für alle regulären $(n \times n)$ -Matrizen?

(a) $A(B + C)^2 C^{-1} = A(2B + C) + AB^2 C^{-1}$

(b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

✓ (c) $C(A + B)A^{-1}C^{-1} = CB((CB)^{-1} + (CA)^{-1})$

(d) $(A + A^{-1})^2 = A^2 + A^{-2} + \mathbb{I}$

7. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1/6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

✓ (c) $\begin{pmatrix} -1/6 & 1/2 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1/6 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 1 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$

8. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen *nicht*?
- (a) A ist halbeinfach.
 - ✓ (b) A ist regulär.
 - (c) A ist diagonalisierbar.
 - (d) A besitzt eine Eigenbasis.
9. Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums von reellen Funktionen $F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist *kein* Untervektorraum?
- (a) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(5) = 0\}$
 - ✓ (b) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$
 - (c) $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 - (d) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist von der Form } f(x) = ax^2 + bx \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$
10. Was ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^3 ?
- ✓ (a) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - (b) $3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 - (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
11. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten von v bezüglich der Standardbasis sind dann...
- ✓ (a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$
 - (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -13 \end{pmatrix}$
 - (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$
 - (d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$

12. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, gegeben durch eine Matrix A , so dass $f(x) = Ax$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen *nicht*?

- (a) $\dim(\operatorname{im} A) + \dim(\ker A^\top) = m$
- (b) f ist eine lineare Abbildung.
- ✓ (c) $\operatorname{im} A \perp \ker A$
- (d) $\operatorname{im} A$ und $\ker A^\top$ spannen zusammen \mathbb{R}^m auf.

13. Welchen Wert hat die Determinante $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$?

- (a) -2
- ✓ (b) 2
- (c) 1
- (d) -1

14. Für eine Matrix A gelte $A^2 - A - \mathbb{I} = 0$. Dann gilt...

- (a) A ist nicht regulär
- (b) A ist regulär, aber die obige Information reicht nicht aus, um A^{-1} zu berechnen.
- (c) $A^{-1} = A + \mathbb{I}$
- ✓ (d) $A^{-1} = A - \mathbb{I}$

15. Gegeben sei die lineare Differentialgleichung $y'''(x) = y''(x) + 5y(x)$. Welche Dimension hat der Lösungsraum?

- (a) 2
- ✓ (b) 3
- (c) 4
- (d) 5

16. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein für reguläre Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- ✓ (a) $((AB)^{-1})^\top = (A^{-1})^\top (B^{-1})^\top$
- (b) $((AB)^{-1})^\top = (B^{-1})^\top (A^{-1})^\top$
- (c) $((AB)^{-1})^\top = B^{-1} A^{-1} B^\top A^\top$
- (d) $((AB)^{-1})^\top = B^\top A^\top B^{-1} A^{-1}$

17. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein *nicht* für zwei ähnliche Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- (a) Die Eigenwerte von A sind die gleichen wie die Eigenwerte von B , mit gleichen algebraischen Vielfachen.
- (b) Sei $A = P^{-1}BP$, wo P orthogonal ist. Die Matrix B ist orthogonal, genau dann, wenn A orthogonal ist.
- (c) $\text{Rang } B = \text{Rang } A$
- ✓ (d) A ist symmetrisch, genau dann, wenn B symmetrisch ist.

18. Die quadratische Form $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ ist:

- (a) positiv definit
- (b) negativ definit
- (c) indefinit
- ✓ (d) positiv semidefinit

19. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ eine Abbildung $f(x) = Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Dann ist die Dimension des Bilds von f gleich...

- (a) 1
- (b) 2
- ✓ (c) 3
- (d) 4

20. Sei $T(x) = Ax$ die Orthogonalprojektion auf eine Ursprungsgerade L in \mathbb{R}^3 . Was können Sie über die Eigenwerte und Eigenräume von T sagen?

- (a) Es hängt von der Ursprungsgerade L ab, daher sollte man zunächst L angeben.
- (b) Die Eigenwerte sind $-1, 0$ und 1 , wobei jeder Eigenraum die Dimension 1 hat.
- ✓ (c) Die Eigenwerte sind 0 und 1 , mit entsprechenden Eigenräumen der Dimension 2 bzw. 1.
- (d) die Eigenwerte sind 0 und 1 , wobei die beiden entsprechenden Eigenräume die Dimension 1 haben.

Textaufgaben

Die offenen Aufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. Betrachten Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$, gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$.

- (a) [3 Punkte] Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A . Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} =: \{5e_1 + 2e_2, 2e_1 + e_2\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 bildet. Finden Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{E} und ihre Inverse T^{-1} .
- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich \mathcal{B} .

Lösung:

- (a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda) - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2),$$

also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha(-1, 1)^T \\ v_2 &= \alpha(3, 2)^T. \end{aligned}$$

Die Matrix A ist diagonalisierbar, da alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1 haben (alternativ: die gefundenen Eigenvektoren sind linear unabhängig).

- (b) Wir haben $x(5e_1 + 2e_2) + y(2e_1 + e_2) = 0$ genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Die Determinante der entsprechenden Matrix ist $1 \neq 0$, also ist die einzige Lösung $x = 0$, $y = 0$. Daher ist \mathcal{B} linear unabhängig und somit eine Basis von \mathbb{R}^2 . Die Übergangsmatrix T und ihre Inverse T^{-1} sind

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von T sind die Elemente von \mathcal{B} in \mathcal{E} ausgedrückt.

- (c) Die Darstellungsmatrix $[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich \mathcal{B} ist

$$[f]_{\mathcal{B}} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -28 & -9 \end{pmatrix}.$$

22. Sei V der reelle Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{e^x, e^{3x}\}$.

- (a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $[g]_{\mathcal{B}}$ der Abbildung

$$g : V \rightarrow V, \quad y(x) \mapsto y''(x) - 3y'(x) + 2y(x)$$

bezüglich der Basis \mathcal{B} .

- (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie mithilfe von (a) eine Lösung $y \in V$ von

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2e^{3x}. \quad (i)$$

- (c) [3 Punkte] Verwandeln Sie die homogene Gleichung

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0. \quad (h)$$

in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung und bestimmen Sie so die allgemeine Lösung von (h).

- (d) [2 Punkte] Wie lautet demnach die allgemeine Lösung von (i)?

Lösung:

- (a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} g(e^x) &= e^x - 3e^x + 2e^x = 0 \\ g(e^{3x}) &= 9e^{3x} - 9e^{3x} + 2e^{3x} = 2e^{3x} \end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Aus (a) folgt, dass e^{3x} eine Lösung des inhomogenen Systems und e^x eine Lösung des entsprechenden homogenen Systems ist. Eine Lösung $y \in V$ ist also gegeben durch

$$y(x) = e^{3x}.$$

- (c) Mit $y_0 = y, y_1 = y'$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der entsprechenden Matrix ist gegeben durch $p(\lambda) = -\lambda(3 - \lambda) + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$, also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Daher lautet die allgemeine Lösung von (h)

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) Die allgemeine Lösung von (i) ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^{3x},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

23. Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben für $p, q \in \mathcal{P}_2$:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx + \int_{-1}^1 f'(x)g'(x) dx.$$

- (a) [7 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis \mathcal{B}' zu erhalten.
- (b) [3 Punkte] Projizieren Sie das Polynom $3x^2$ orthogonal auf den Unterraum $\text{span}\{1, x\}$.

Lösung:

(a) Wir normieren das erste Polynom

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx + \int_{-1}^1 0 \cdot 0 dx} = \sqrt{2},$$

so dass $b_1(x) = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jetzt berechnen wir

$$\tilde{b}_2(x) = x - \langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

wobei

$$\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx + \int_{-1}^1 1 \cdot 0 dx = 0$$

Daher müssen wir nur $\tilde{b}_2(x)$ normalisieren, und es gibt

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x \cdot x dx + \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Somit erhalten wir die normalisierte Version $b_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$. Im dritten Schritt ergibt sich

$$\tilde{b}_3(x) = x^2 - \langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}},$$

und wir berechnen

$$\langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x^3 dx + \int_{-1}^1 2x \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} dx = 0 \quad (\text{ungerade Integranden})$$

$$\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx + \int_{-1}^1 0 dx = \frac{2}{3\sqrt{2}}.$$

Es folgt dass $\tilde{b}_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$, und die Norm ist

$$\begin{aligned}\|x^2 - \tfrac{1}{3}\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \tfrac{1}{3})^2 + 2x \cdot 2x \, dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 x^4 + (4 - \tfrac{2}{3})x^2 + \tfrac{1}{9} \, dx} \\ &= \sqrt{\tfrac{2}{5} + \tfrac{20}{9} + \tfrac{2}{9}} = \sqrt{\tfrac{128}{45}} = \tfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Der dritte Basisvektor ist dann

$$b_3(x) = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}},$$

und wir haben also die Orthonormalbasis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x, \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \right\}.$$

- (b) Aus (a) haben wir für $\text{span}\{1, x\}$ die Orthonormalbasis $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x\}$. Die orthogonale Projektion von $3x^2$ auf diesen Unterraum ist somit gleich

$$3\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x.$$

Die auftretenden Skalarprodukte haben wir bereits ausgerechnet und damit erhalten wir $p(x) = 1$ als Projektion von $3x^2$.